Bsc algebra1 normál gyakorlat

Mintazárthelyi I (2019 ősz) — eredmények és pontozás

1. a) A Horner-elrendezést kétszer alkalmazva az eredmény $\big(x-(1/2)\big)^2(4x^2+4x+4)$, tehát az $1/2$ kétszeres gyök (2 pont). **b)** A racionális gyökteszt szerint a lehetséges gyökök ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/3$, $\pm 1/6$, ± 2, $\pm 2/3$ (1 pont). Pozitív gyök nincs, mert a polinom minden együtthatója pozitív. Behelyettesítve látjuk, hogy a -1 gyök. A gyöktényezőt Hornerrel kiemelve és a másodfokú egyenletet megoldva a gyökök -1, $-1/2$, $-2/3$, mindegyik szükségképpen egyszeres (2 pont). **c)** A nevező konjugáltjával bővítve a hányados $(11/25)+(2/25)i$, abszolút értéke $1/\sqrt{5}$ (1 pont).

2. a) A megoldóképletből a négyzetgyök alatti szám $3+4i$ (1 pont), négyzetgyöke $\pm(2+i)$ (1 pont), a megoldások $3+2i$ és $1+i$ (1 pont). **b)** A szám trigonometrikus alakja $8(\cos 240° + i\sin 240°)$ (1 pont). A köbgyökök: $2(\cos 80° + i\sin 80°)$, első síknegyed; $2(\cos 200° + i\sin 200°)$, harmadik síknegyed; $2(\cos 320° + i\sin 320°)$, negyedik síknegyed (1 pont). **c)** Mivel $275/360 = 55/72$, ahol $(55,72)=1$, ezért a rend 72 (1 pont).

3. a) Gauss-eliminációval számolva $(x,y,z) = \big(x, (11/3)x-(5/3), (3/2)x+(3/2)\big)$ az általános megoldás egy lehetséges paraméterezése (3 pont). **b)** $\begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ (1 pont). **c)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2 pont).

4. Ha $z = x+iy$, akkor $1/z = (x-iy)/(x^2+y^2)$ (1 pont). Mindkét oldalt kiszámolva kapjuk, hogy $4x/(x^2+y^2)+1 \le 4y/(x^2+y^2)-1$ (2 pont). Rendezve $x^2+y^2+2x-2y \le 0$ (1 pont), teljes négyzetté kiegészítve $(x+1)^2+(y-1)^2 \le 2$, ami a $(-1,1)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körlap, a $z=0$ pont kivételével (2 pont).

5. A feltételek szerint $f(x) = (x-a)^6(x-b)^6 g(x)$, ahol $a<b \in \mathbb{Z}$ és g is egész együtthatós (2 pont). Ha $f(c)=32$, ahol c egész, akkor, mivel 32-ben nem szerepel prím a hatodik, vagy annál nagyobb hatványon, $c-a$-nak és $c-b$-nek sincs prímosztója, és így mindkettő ± 1 (2 pont). Mivel $a<b$, ez csak úgy lehet, hogy $c = a+1 = b-1$. Tehát legfeljebb egy darab c lehet (1 pont). Erre példa: $f(x) = 32(x-1)^6(x+1)^6$, ahol $c=0$ (1 pont).

6. Ha $o(\varepsilon)=n$, akkor ε szöge 360°-nak k/n-szerese, ahol $(k,n)=1$ (1 pont). Ezért $i\varepsilon$ szöge 360°-nak $(k/n)+(1/4) = (4k+n)/(4n)$-szerese (1 pont). Az kell, hogy ennek a törtnek a nevezője egyszerűsítés után $2n$ legyen (1 pont). Így kettővel lehet egyszerűsíteni, azaz a számláló páros, tehát n páros. Mivel 4-gyel nem lehet egyszerűsíteni, $n/2$ páratlan (1 pont). Páratlan p prímmel nem lehet egyszerűsíteni, mert ha $p \mid 4n$, akkor $p \mid n$, és ha $p \mid 4k+n$ is teljesül, akkor $p \mid 4k$, azaz $p \mid k$, de ez ellentmond annak, hogy $(k,n)=1$ (1 pont). Vagyis n pontosan akkor felel meg a feladat feltételeinek, ha $4m+2$ alakú. Ezért például minden 50-edik primitív egységgyök megoldás (1 pont). *Megjegyzés:* Teljes értékű megoldásnak számít egy konkrét jó ε megadása, az $o(\varepsilon)$ és az $o(i\varepsilon)$ rendesen megindokolt kiszámításával együtt. Például ha $\varepsilon = \cos 4° + i\sin 4°$, akkor rendje 90, hiszen $4/360 = 1/90$ és $(1,90)=1$. Ekkor $i\varepsilon = \cos 94° + i\sin 94°$, aminek rendje 180, hiszen $94/360 = 47/180$, és $(47,180)=1$.