Bsc algebra1 gyakorlat

Ötödik előadás-dia

1. Az AB, BA, BC, $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehetséges: $A + A$, $A + B$, AB, AC, AC^T, DD^T, D^TD, $AC + 2C$, $AD - 3D$, D^2, BC, CB. Itt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Adjunk meg olyan 10×10-es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100-as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez **minden** 10×100-as C-re teljesüljön?

4. Számítsuk ki az 5×5-ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix, és hogy ezek részgyűrűt alkotnak. Mi áll a szorzat diagonálisában?

6. Ha $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, akkor mi az N mátrix második sorának harmadik eleme?

7. Adjuk meg azokat az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixokat, melyekre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} A = A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

8. *(*)* Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

9. Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(ij)}$-vel? Van-e olyan 3×3-as A mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges 3×3-as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen A akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?

10. *(*)* Az M és N mátrixok **felcserélhetők,** ha $MN = NM$. Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az $E^{(23)}$-mal felcserélhető (lásd az előző feladatot). Melyek azok az $n \times n$-es mátrixok, amelyek **minden** $n \times n$-es mátrixszal felcserélhetők?

11. *(*)* Mely mátrixokkal felcserélhetők ezek a mátixok: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

12. *(**)* Igazoljuk, hogy ha $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $MN - NM$ nem lehet az egységmátrix.

13. *(*)* Legyen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)E = 0$.

14. ***(**)*** Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben az $X^2 = I$, $X^2 = -E$, $X^2 = 0$ és $X^2 = X$ egyenletek minél több megoldását!

---

15. Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: invertálható mátrixok összege is invertálható.

17. Egy mátrix első két sorát megcseréljük. Hogyan változik meg az inverze?

18. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

(1) Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása.

(2) Ha az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása.

(3) Ha $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$-re létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.

(4) Ha $A \in \mathbb{R}^{6\times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^6$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^6$-ra létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.

19. ***(5.11.1*)*** Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}^{2\times 2}$-nek nemkommutatív részgyűrűjét alkotják a $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $z, w \in \mathbb{C}$. Bizonyítsuk be, hogy ez ferdetest, és keressünk benne (minél több) $\mathbb{C}$-vel izomorf résztestet.

---

20. ***(**)*** Legyen R egy kommutatív, egységelemes gyűrű.

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha az $R[x]$ polinomgyűrű definíciójában a változó negatív kitevős hatványait is megengedjük (de összesen csak véges sok tagot), akkor egy gyűrűt kapunk. Ezt a gyűrűt a *Laurent-polinomok* gyűrűjének nevezik, és $R[x, x^{-1}]$-szel jelölik. Mik $K[x, x^{-1}]$ invertálható elemei, ha K test?

(2) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek neve a *formális hatványsorok* gyűrűje, jelölés: $R[[x]]$. Mik $K[[x]]$ invertálható elemei, ha K test?

(3) Bizonyítsuk be, hogy ha a polinomok sorozatos definíciójában nem kötjük ki, hogy $a_n = 0$ minden elég nagy n-re, és megengedünk *véges sok* negatív kitevőjű tagot is, akkor is gyűrűt kapunk. Ennek a gyűrűnek a neve a *formális Laurent-sorok* gyűrűje, jelölés: $R((x))$. Igazoljuk, hogy $K((x))$ test, ha K test.

(4) Gyűrűt kapunk-e, ha a polinomok definíciójánál végtelen sok negatív és végtelen sok pozitív kitevős tagot is megengedünk?

21. ***(5.1.32**)*** Ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.

22. ***(2.1.12**)*** Ha p prím és $S = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$, ahol ε primitív p-edik egységgyök, mennyi S^2?