

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**II. rész (60 perc).** Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Írjuk föl az  $(123)(1342)(123)^{-1} \in S_4$  elemet három transzpozíció szorzataként.

Pl.  $(23)(24)(12)$ 

12. Adjuk meg a  $D_{12}$  diédercsoportban  $f^2$  konjugáltosztályát.

 $\{f^2, f^{-2} = f^{10}\}$ 

13. Soroljuk föl az  $S_3 \times \mathbb{Z}_8^+$  csoport 6 rendű elemeit.

 $((123), 4), ((132), 4).$ 

14. Hány részcsoportja van a Klein-csoportnak (a triviálisakkal együtt)?

5

15. Hány pályája van az  $(123)$  és  $(45)(67)$  elemek által generált részcsoportnak  $S_8$ -ban?

4

16. Adjunk meg egy 100 elemű csoportot, ami két másodrendű elemmel generálható.

 $D_{50}$ 

17. Adjunk meg a  $D_8$  diédercsoportban egy olyan részcsoportot, ami nem normálosztó.

Pl.  $\{1, t\}$ .

18. A  $Q$  kvaterniócsoporton a  $j$  elemmel való konjugálás hányadrendű permutáció?

2

19. Adjunk példát olyan  $N \triangleleft G$ -re és  $g \in G$ -re, melyre  $g$  rendje  $G$ -ben 6 és  $gN$  rendje  $G/N$ -ben 2.

Pl.  $G = \mathbb{Z}_6^+, g = 1, N = \{0, 2, 4\}$ .

20. Mely  $M$  mátrixokból áll  $GL(2, \mathbb{C})$ -ben az egységmátrix hat-szorosának  $SL(2, \mathbb{C})$  szerinti mellékosztálya?

 $\det(M) = 36$

21. Ha a  $\mathbb{Z}_{90}^\times$  csoportot prímszámú ciklikus csoportok direkt szorzatára bontjuk, akkor hány tényező lesz, és ezeknek mi a rendje?

$$\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+ \times \mathbb{Z}_4^+$$

22. Hány elemű a  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$  faktorgyűrű?

25

23. Mely  $c \in \mathbb{R}$  számokra lesz  $\mathbb{R}[x]/(x^3 + c)$  test?

Nincs ilyen.

24. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha  $R$  kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor minden elemének additív rendje 1, végtelen vagy prím”.

$R = \mathbb{Z}_4$ , az 1 rendje az összeadásra 4 (ez a gyűrű szükségképpen nem nullosztómentes).

25. Adjunk példát olyan  $\alpha \in \mathbb{C}$ -re, melyre  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[7]{5})$ . Mennyi  $\alpha$  foka  $\mathbb{Q}$  fölött?

Pl.  $\sqrt[21]{5}$  foka 21.

26. Legalább hányadfokú  $\mathbb{Q}$  egy olyan **normális** bővítése  $\mathbb{Q}$  fölött, amely tartalmaz tizedik primitív egységgyököt?

 $\varphi(10) = 4$ 

27. Adjunk példát arra, amikor Frobenius tételének feltételei közül nem igaz a nullosztómentesség, de a többi feltétel teljesül, és a tétel konklúziója nem igaz.

$$\mathbb{R}^{2 \times 2}$$

28. Hány hatodfokú irreducibilis polinom van  $\mathbb{Z}_3$  fölött?

 $(3^6 - 3^3 - 3^2 + 3)/6$ 

29. Hány elemű az  $x^9 - 1$  polinom felbontási teste  $\mathbb{Z}_3$  fölött?

3

30. Számítsuk ki az  $1 - i + 2j$  kvaternió minimálpolinomját.

 $x^2 - 2x + 6$