**Bsc algebra3a gyakorlat**

*Második zárthelyi (2018. december 14.) — eredmények és pontozás*

**1.** A négyzete $-7-4i+4j-12k$, inverze $(2+i-j+3k)/15$, minimálpolinomja $x^2-4x+15$ (mindegyik 2 pont).

**2.** Az $\alpha^3=-2\alpha-2$ összefüggést felhasználva a keresztbe szorzás után a következő összefüggést kapjuk: $\alpha^2=(-2c-a)+(a-b-2c)\alpha+(b-c)\alpha^2$. Ezért $b-c=1$ és a másik két együttható nulla (5 pont). A lineáris egyenletrendszert megoldva az eredmény $a=2/5$, $b=4/5$, $c=-1/5$.

**3.** Az egyes fokok kiszámítása a következő.

(1) Ha $x=\sqrt[5]{2+\sqrt{2}}$, akkor $(x^5-2)^2=2$, azaz $x^{10}-4x^5+2=0$. Ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, tehát a keresett fokszám 10.

(2) A $\mathbb{Q}$ fölött $\sqrt[3]{5}$ foka 3 és $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})$ foka 8 a Schönemann–Eisenstein miatt (1 pont). Ezért $\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\sqrt[8]{3})$ foka osztható 24-gyel, hiszen 3 és 8 relatív prímek (1 pont). Ugyanakkor a $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})\le\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3},\sqrt[3]{5})$ bővítés foka legfeljebb 3, mert $x^3-5$ jó polinomja $\sqrt[3]{5}$-nek $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})$ fölött is (1 pont). Hasonlóan $\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})$ foka legfeljebb 8. A szorzástétel miatt mindenhol egyenlőség van, ezért a keresett fokszám a 3 (1 pont).

(3) Mivel $x^7-3$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ezért $\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(\sqrt[7]{3})$ foka 7 (1 pont). Így e test minden eleme hetedfokú $\mathbb{Q}$ fölött, kivéve $\mathbb{Q}$ elemeit, amelyek elsőfokúak (1 pont). De $\sqrt[7]{3}+\sqrt[7]{9}\notin\mathbb{Q}$ az egyszerű testbővítés elemeinek egyértelmű felírása miatt (1 pont). Ezért a keresett fokszám a 7 (1 pont).

(4) A felbontási test nyilván $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3},\varepsilon,i)$, ahol $\varepsilon$ harmadik primitív egységgyök (2 pont). De $\varepsilon$ és $i$ együtt negyedfokú bővítést generál, hiszen ezt a bővítést generálja $i$ és $\sqrt{3}$ is, vagy akár egy tizenkettedik primitív egységgyök is (1 pont). Mivel 3 és 4 relatív prímek, a keresett fokszám 12 (1 pont).

**4.** Mivel $f$-nek gyöke 1, ezért a gyöktényező kiemelhető: $f(x)=(x-1)(x^2+1)$ (1 pont). Az $x^2+1$ irreducibilis $\mathbb{Z}_3$ fölött, hiszen másodfokú, és nincs gyöke ebben a testben (1 pont). Ezért a felbontási test másodfokú bővítése $\mathbb{Z}_3$-nak, vagyis 9 elemű (1 pont). Ebben a multiplikatív csoport $\mathbb{Z}_8^+$-cal izomorf (1 pont), ezért 8 rendű elem $\varphi(8)=4$, negyedrendű $\varphi(4)=2$, másodrendű pedig $\varphi(2)=1$ van (2 pont). Mivel $x^2+1\mid x^4-1$, ezért $x^2+1$ gyökeinek rendje négynek osztója (3 pont). De nem lehet 2 vagy 1, mert a másod- és elsőrendű elemek $\pm1$, és ezek nem gyökei $x^2+1$-nek (2 pont). Ezért $x^2+1$ gyökei negyedrendűek, az 1 pedig elsőrendű (1 pont).

**5.** A megfelelő reprezentánsrendszer az $a+bx$ alakú polinomok halmaza, ahol $a$-val mod 4, viszont $b$-vel mod 2 kell számolni, ezért a faktorgyűrű elemszáma 8 (2 pont). Azok az invertálható elemek, amelyekben $a$ páratlan (1 pont). Ugyanis ezek inverze önmaga (1 pont), a többi elem viszont ideált alkot, amelyben bármely két elem szorzata nulla, hiszen $a+bx$-et és $c+dx$-et összeszorozva $x^2$ is, a 4-gyel osztható $ac$ is, és $(ad+bc)x$ is benne van az $(4,2x,x^2)$-ben, mert $ad+bc$ páros (2 pont).