**Bsc algebra3a gyakorlat**

*Második zárthelyi (2018. december 14.)*

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Az érdemjegy az összpontszám hatodrésze. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

**1.** ***(6 pont)*** Számítsuk ki a $2-i+j-3k$ kvaternió négyzetét, inverzét és minimálpolinomját.

**2.** ***(6 pont)*** Legyen $\alpha$ az $x^3+2x+2$ polinom egyik komplex gyöke. Írjuk föl az $\alpha^2/(\alpha-1)$ számot $a+b\alpha+c\alpha^2$ alakban, ahol $a,b,c\in\mathbb{Q}$.

**3.** ***(4 + 4 + 4 + 4 pont)*** Számítsuk ki az alábbi fokszámokat.

(1) $\sqrt[5]{2+\sqrt{2}}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött.
(2) $\sqrt[3]{5}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})$ fölött.
(3) $\sqrt[7]{3}+\sqrt[7]{9}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött.
(4) $(x^3-3)(x^4-1)$ felbontási testének foka $\mathbb{Q}$ fölött.

**4.** ***(6 + 6 pont)*** Határozzuk meg az $f(x)=x^3+2x^2+x+2$ polinom felbontási testének elemszámát $\mathbb{Z}_3$ fölött, továbbá e test multiplikatív csoportjában az elemek rendjeit (milyen rendű hány darab van). Extra 6 pontért döntsük el azt is, hogy $f$ gyökei hányadrendűek.

**5.** ***(6 pont)*** Számítsuk ki a $\mathbb{Z}[x]/(4,2x,x^2)$ faktorgyűrű elemszámát és az invertálható elemeinek a számát. Mutassuk meg, hogy a nem invertálható elemek egy olyan ideált alkotnak, amelyben bármely két elem szorzata nulla.