NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Mennyi $(12)(23)(34)(567) \in S_9$ rendje?

    12

12. A D_8 diédercsoportban mennyi $(ftf^2t)^{30}$ rendje?

    4

13. Hány 40 rendű elem van az $\mathbb{F}_{81}$ test multiplikatív csoportjában?

    $\varphi(40) = 16$

14. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „egy G csoportnak minden k-ra legfeljebb egy k indexű részcsoportja lehet.”

    $G = S_3$ és $k = 3$ (vagy G a Klein-csoport és $k = 2$).

15. Hány pályája van az $(123)(45)(67)$ elem által generált részcsoportnak S_9-ben?

    5

16. Adjunk meg egy olyan csoportot, ami nem generálható két elemmel.

    Pl. $(\mathbb{R}^+)^3$, $(\mathbb{Z}_2^+)^3$

17. Adjunk meg az A_4 alternáló csoportban egy olyan részcsoportot, ami nem normálosztó.

    Pl. az (123) által generált részcsoport.

18. Hány konjugáltosztálya van a D_4 diédercsoportnak?

    5

19. Legyen $N = \{1, f^4, f^8\} \triangleleft D_{12}$. Mennyi f^2N rendje a D_{12}/N faktorcsoportban?

    2

20. Adjuk meg $(-k, 2)$ rendjét a $Q \times \mathbb{Z}_7^\times$ csoportban (Q a kvaterniócsoport).

    $[4, 3] = 12$

21. Ha a $\mathbb{Z}_{21}^{\times}$ csoportot prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára bontjuk, akkor hány tényező lesz, és ezeknek mi a rendje?

$\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$

22. Adjunk meg egy nullosztót a $\mathbb{Z}[x]/I$ faktorgyűrűben, ahol $I = (2, x^2 - 1)$

$x - 1 + I$

23. Mely $c \in \mathbb{R}$ számokra lesz $\mathbb{R}[x]/(x^2 + c)$ test?

$c > 0$

24. Adjunk meg egy 3 karakterisztikájú végtelen gyűrűt.

$\mathbb{Z}_3[x]$

25. Adjunk példát olyan $\alpha \in \mathbb{C}$-re, amikor az α szám $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ fölötti foka nem osztója a $\mathbb{Q}$ fölötti fokának.

Pl. $\alpha = \varepsilon \sqrt[5]{2}$, ahol ε primitív ötödik egységgyök.

26. Adjunk példát $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ egy véges, nem normális bővítésére.

Pl. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt[3]{2})$

27. Melyek transzcendensek az alábbi számok között? **A**: $\sqrt{\pi} + \sqrt{7}$, **B**: $\sqrt[7]{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{5}$, **C**: $\sum_{k=10}^{\infty} 10^{-k}$, **D**: $\sum_{k=10}^{\infty} 10^{-k!}$.

A, *D*.

28. Az $x^3 - x - 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_3$ fölött, legyen $\alpha \in \mathbb{F}_{3^3}$ az egyik gyöke. Mi lesz a másik két gyöke?

$\alpha^3 (= 1 + \alpha)$, $\alpha^9 (= 2 + \alpha)$.

29. Hány elemű az $x^9 - 1$ polinom felbontási teste $\mathbb{Z}_2$ fölött?

2^6

30. Számítsuk ki az $1 - i + 2j$ kvaternió inverzét.

$(1/6)(1 + i - 2j)$