

1. Csoportreprezentációk

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ véges csoport és T test.

$T[G]$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza ($\lambda_i \in T$). Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ bázis. A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G -beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.

Ez a *csoportalgebra*. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor

$$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2)1 + (\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2)a.$$

$$b_1 = (1 + a)/2, b_2 = (1 - a)/2 \text{ bázis, } b_1^2 = b_1, b_2^2 = b_2, b_1 b_2 = 0.$$

Ezért $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \leftrightarrow (\beta_1, \beta_2)$ gyűrűizomorfizmus $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ -vel.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf \mathbb{C} fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha G kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

Legyen $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \dots \times R_k$, ahol $R_i \cong \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$.

Az i -edik *projekció*, ami (r_1, \dots, r_k) -hoz r_i -t rendel, egy $\varphi_i : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűhomomorfizmust ad. A G elemeire megszorítva ez egy $G \rightarrow \text{GL}(n_i, \mathbb{C})$ csoport-homomorfizmus. Ezek tökéletesen megfogják G szerkezetét.

Definíció (475. oldal)

A G véges csoport $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ -be vezető homomorfizmusait a G (komplex fölötti) *reprezentációinak* nevezzük.

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.

$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1 \times 1}$ nyilván homomorfizmus.

$\varphi_2 : g \mapsto \text{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).

$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a g -nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

$$\varphi_3(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3((123)) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (az } y\text{-tengelyre való tükrözés).}$$

Állítás (NB)

$$\mathbb{C}[S_3] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

A három projekció a fenti három reprezentációnak felel meg.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok. Ha φ és ψ homomorfizmusok G -ből H -ba, akkor *pontonkénti összegük*: $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ is az. Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\text{Hom}(G, H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}^+.$$

Ha $\varphi(1) = m$, akkor $\varphi(n \cdot 1) = nm$. Ez egy φ_m homomorfizmus. Vagyis $\text{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+)$ elemei a φ_m -ek (m -mel szorzások). Nyilván $\varphi_{m+k} = \varphi_m + \varphi_k$. Ezért $m \rightarrow \varphi_m$ izomorfizmus \mathbb{Z}^+ és $\text{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+)$ között.

HF: $\text{Hom}(\mathbb{Z}_4^+, \mathbb{Z}_6^+) \cong \mathbb{Z}_2^+$ (7.7.8. Kérdés).

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.

(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$. Ez egyértelműen meghatározza χ -t, jelölje ezt a leképezést χ_ε . Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \rightarrow \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz. Nyilván $\chi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1} \chi_{\varepsilon_2}$, hiszen az 1-et mindkettő $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ -be viszi. Ezért $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^d = 1\} \leq \mathbb{C}^\times$. Ez pontosan a d -edik egységgyökök részcsoportja, ami ciklikus, bármelyik d -edik primitív egységgyök generálja. Ezért $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}_d^+$.

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\text{Hom}(G \times H, K) \cong \text{Hom}(G, K) \times \text{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \text{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.

Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \rightarrow K$ homomorfizmust definiál.

Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \text{Hom}(H, K)$.

Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \text{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \text{Hom}(H, K)$,

akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \text{Hom}(G \times H, K)$.

HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. \square

$\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$ bizonyítása: Bontsuk G -t a véges Abel-csoportok alaptétele szerint (prímhatványrendű) ciklikus csoportok direkt szorzatára, és alkalmazzuk a fenti állítást. \square

Név: \widehat{G} a G duálisa. Folytonos csoportokra: *Pontrjagin-dualitás*.

Ortogonalitás

$\text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: *csoportkarakterek* (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha g_0 -lal véagszorzozzuk G elemeit, akkor G minden elemét egyszer kapjuk meg. Ezért

$$S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g) = \chi(g_0) S.$$

Mivel $\chi(g_0) \neq 1$, ezért $S = 0$. \square

Következmény

Ha $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$, akkor $\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g) = 0$.

Valóban: $\chi(g^{-1})\psi(g)$ a $\chi^{-1}\psi \in \widehat{G}$ -nek a g -nél felvett értéke. \square

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n , és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok \widehat{G} elemeivel vannak indexelve, és a g -edik sor χ -edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).

Ekkor $S^*((1/n)S) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S -et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$. Az ortogonalitás miatt S^*S diagonális mátrix. A főátlóban $\chi(g^{-1})\chi(g) = 1$ miatt n áll. \square

Tekintsük $(1/n)S$ -et egy bázistranszformáció áttérési mátrixának.

A $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ a régi bázis, az új bázis elemei:

$$b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g)g \in \mathbb{C}[G], \text{ ahol } \chi \in \widehat{G}.$$

Ez tényleg bázis, mert S invertálható.

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ -re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.

Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f \in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$, és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f) \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$. Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$, akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$, tehát $s_f = |G|\psi(f)$, és $b_\chi^2 = b_\chi$. \square

Mivel a b_χ elemek bázist alkotnak, a csoportalgebra minden eleme egyértelműen felírható $\sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi$ alakban ($X_\chi \in \mathbb{C}$). Ezt $(\dots, \mu_\chi, \dots) \in \mathbb{C}^n$ -nek megfelelően *gyűrűizomorfizmust* kapunk $\mathbb{C}[G]$ és a \mathbb{C}^n direkt szorzat között.

Valóban, a szorzattartás a fenti összefüggések következménye. \square

2. Diszkrét Fourier-transzformáció

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g \in G} x_g g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,

továbbá $\mathbf{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathbf{X} = (\dots, X_\chi, \dots)$.

(Mostantól azonosítjuk az \mathbf{x} vektort a $\sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathbf{x} : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathbf{x}(g) = x_g$.)

Bázistranszformáció: $\mathbf{X}^T = S^* \mathbf{x}^T$ és $\mathbf{x}^T = (1/n) S \mathbf{X}^T$.

Azaz $X_\chi = \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n) \sum_{\chi \in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}$ a *diszkrét Fourier-transzformáció*. Jele $\mathbf{X} = \widehat{\mathbf{x}}$.

$\mathcal{F}^{-1} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}$ az *inverz Fourier-transzformáció*. Jele $\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n}) \mathcal{F}$ unitér transzformáció \mathbb{C}^n -en. Ezért

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (1/n) \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$, azaz $\sum_{g \in G} \overline{x_g} y_g = (1/n) \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{X_\chi} Y_\chi$.

$\|\mathbf{x}\| = (1/n) \|\mathbf{X}\|$, azaz $\sum_{g \in G} |x_g|^2 = (1/n) \sum_{\chi \in \widehat{G}} |X_\chi|^2$.

(Parseval-formula, illetve Plancherel-formula).

$\sum_{g \in G} x_g g \mapsto \mathbf{X}$ gyűrűhomomorfizmus $\mathbb{C}[G]$ -ből \mathbb{C}^n -be.

Konvolúció

Legyen $\mathbf{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathbf{y} = (\dots, y_g, \dots)$, továbbá

$$(\sum_{g \in G} x_g g)(\sum_{g \in G} y_g g) = \sum_{g \in G} z_g g, \text{ ekkor } z_g = \sum_{f \in G} x_g f^{-1} y_f.$$

A $\mathbf{z} = (\dots, z_g, \dots)$ neve az \mathbf{x} és \mathbf{y} *konvolúciója*, jele $\mathbf{x} * \mathbf{y}$. Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője. A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát $\mathcal{F}(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{y}) = (\dots, \mathbf{X}_\chi \mathbf{Y}_\chi, \dots)$ (pontenkénti szorzás).

A konvolúció tulajdonságai

- Mindkét változóban lineáris \mathbb{C} fölött, kommutatív, asszociatív.
- Van egységelem: $x_1 = 1$ és $x_g = 0$ ($g \neq 1$) megfelelő.
- Legyen T_h a $h \in G$ -vel való jobbszorítás a csoportalgebrán, ez h -val való *eltolás*. Ekkor $T_h(\mathbf{x})(g) = \mathbf{x}(gh^{-1})$
(HF). Konvolúció eltoltja: $T_h(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = T_h(\mathbf{x}) * \mathbf{y} = \mathbf{x} * T_h(\mathbf{y})$.

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$, azaz $\sum_{g \in G} x_g g = \sum_{\chi \in \hat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor

$$\sum_{g \in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{X_\chi} b_{\chi^{-1}} \text{ és } \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g \in G} \overline{x_{g^{-1}}} g,$$

azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathbf{x}}) = (\dots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \dots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}) = (\dots, \overline{x_{g^{-1}}}, \dots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ *konjugáltja* legyen $\sum_{g \in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$ -nek, minden $g \in G$ *konjugáltja* önmaga.)

Mivel $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ (pontenkénti inverz)

ezért $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g$ *konjugáltja* $b_{\chi^{-1}}$. Így

$$\sum_{g \in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{X_\chi} b_{\chi^{-1}} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi.$$

Az inverz transzformációt az $x_g = (1/n) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) X_\chi$ képlettel számítva

$$(1/n) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) \overline{X_\chi} = \overline{(1/n) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g^{-1}) X_\chi} = \overline{x_{g^{-1}}}. \quad \square$$

3. Idő- és frekvenciatartomány

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \rightarrow \chi_k$ izomorfizmus G és \widehat{G} között.

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \leq j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i \sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \leq m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj} \varepsilon^{mj}$.

De $\varepsilon^{(m-k)j} = \chi_{m-k}(j)$, tehát az ortogonalitás miatt $X_{\chi_k} = 0$ ha $n \nmid m-k$, azaz ha $m \neq k$, hiszen $0 \leq k, m < n$. Ha $k = m$, akkor $X_{\chi_k} = n$ (az összeg minden tagja 1).

HF: $f(x)$ transzformáltja $X_{\chi_k} = n$ ha $k = n - m$ és 0 egyébként.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$. Mikor lehet az (y_0, \dots, y_{n-1}) mintából m értékét visszakapni?

(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.

$f(x) = \cos(mx) + i \sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.

Mivel $g(x) = \sin(mx) = (f(x) - \overline{f(x)})/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$; egyébként $Y_{\chi_k} = 0$.

A $-\sin((n-m)x)$ függvény ugyanazt a mintát adja, mint $\sin(mx)$. Ha előre tudjuk, hogy $n > 2m$ is teljesül, akkor m és $n - m$ közül már ki tudjuk választani a megfelelőt, mert $n - m > n/2$. Vagyis elég sűrű mintavételezéssel kell dolgozni.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz. A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).

A kettő hangja együtt: $f(t) = 2 \sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.

Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$,

továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető, ami $\sin(m \cdot 2\pi t)$ és $\cos(m \cdot 2\pi t)$ alakú függvények (végtelen) lineáris kombinációja. Ha mindegyik $m \leq 880$ (és így az összeg véges), akkor a Fourier-transzformáltban csak χ_m és χ_{n-m} szerepelhet. De $n-m > 880$, ezért a szereplő frekvenciák értéke és amplitúdója rekonstruálható.
Shannon-Nyquist tétele: A jelben előforduló maximális frekvencia több, mint duplájával elég mintavételezni.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$. A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel *alias*-ának nevezzük.

Védekezés: Anti-aliasing szűrő. A mintavételezés (digitalizálás) előtt használunk egy analóg, alul-áteresztő szűrőt, ami a jelből levágja a kívánt mintavételezési frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú jeleket. (A CD esetében a mintavételezési frekvencia 44.1 kHz, mert az emberi hallás felső határa 20 kHz.)

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.

Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.

Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban ($0 \leq j < n, 0 \leq k < m$).

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q) : p \in \mathbb{Z}_n^+, q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ ($\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m)$).

Nyilván $(p, q) \rightarrow (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus G és \widehat{G} között.

Legyen $x_{j,k} = f(aj/n, bk/m)$, írjunk (χ_p, ψ_q) helyett (p, q) -t.

Ekkor a transzformált $X_{p,q} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^{-jp} \eta^{-kq} x_{j,k}$,

mert $\overline{\chi_p(j)} = \varepsilon^{-jp}$ és $\overline{\chi_q(k)} = \eta^{-kq}$. Exponenciális jelöléssel: ha $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, akkor $\varepsilon^{-jp} \eta^{-kq} = e^{-2\pi i[(jp/n)+(kq/m)]}$.

Inverz: $x_{j,k} = (1/(mn)) \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} e^{2\pi i[(jp/n)+(kq/m)]} X_{p,q}$.

4. Zajcsökkentés

Szűrők

Legyen \mathbf{x} egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen \mathbf{x} transzformáltja \mathbf{X} (mostantól X_{χ_k} helyett X_k -t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként. Az \mathbf{XY} (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt. A kapott \mathbf{z} minta megfelelő lesz.

Alternatíva

A keresett \mathbf{z} megkapható, mint $\mathbf{x} * \mathbf{y}$ (konvolúció), ahol \mathbf{y} az \mathbf{Y} inverz Fourier-transzformáltja.

Kompromisszumot kell kötni a számítási igény miatt. Például kinullázni \mathbf{y} kis abszolút értékű komponenseit, vagy kevésbé agresszív vágást alkalmazni \mathbf{Y} definíciójában.

Eredeti kép



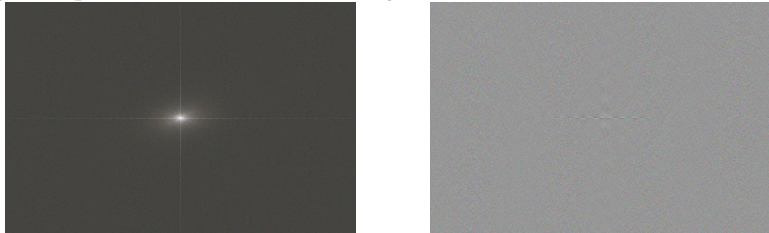
Ezen a képen fogjuk bemutatni a zajcsökkentési algoritmusokat.

Zajos kép



A képhez normális eloszlású (Gaussian) zajt adtunk hozzá. Ezt próbáljuk majd eltávolítani különféle módszerekkel.

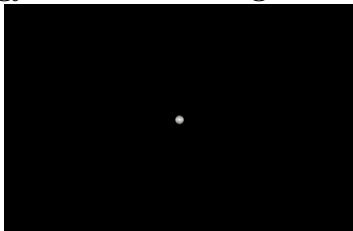
A zajos kép Fourier-transzformáltja



Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk. A jobb oldali kép pontjai a megfelelő szám szögét (fázisát), a másik kép pontjai az abszolút értékét (amplitúdóját) ábrázolják. Utóbbiak fel vannak skálázva, mert az értékek olyan kicsik, hogy szinte az egész kép fekete lenne (fekete = 0, fehér = 1).

Az elrendezés olyan, hogy minél távolabb vagyunk a középponttól, annál nagyobb frekvenciákhoz tartozó értékeket látunk. Középen fényesebb a kép, így a kis frekvenciák értékei a nagyobbak.

A nagy frekvenciák levágása



A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép élettelené vált, és az élekkel párhuzamos vonalak jelentek meg. Utóbbi az úgynevezett *Gibbs-jelenség*. Oka a következő.

A transzformáltat egy olyan függvénnyel szoroztuk, amely a középső körön belül 1, másutt nulla. Ha ezt visszatranszformáljuk, akkor nagy amplitúdójú rezgések szerepelnek benne, és ezzel a függvénnyel kell konvolúciót képezni.

Óvatosabb vágás



Itt nagyobb átmérőjű körrel vágtuk le az amplitúdókat ábrázoló képet. Még jobb eredményt kaphatunk kevésbé durva átmenettel.

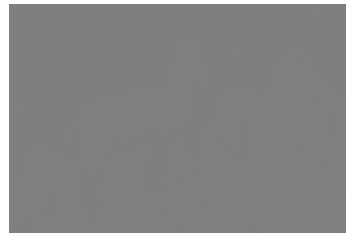
Gaussian blur



A művelet egy kétdimenziós Gauss-görbével való konvolúció. A Gibbs-féle vonalak eltűntek, de a kép még mindig lágy.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk. Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani. Minden réteg egyre nagyobb léptékű alakzatokat választ ki. Mivel a zaj tipikusan kis léptékű, lehetséges a zajcsökkentés úgy, hogy a kis léptékű rétegekben agresszívanabban filterezünk. Minden egyes rétegben meg is vizsgálhatjuk a zaj mértékét. Ehhez a valószínűségi számításban tanult *szórást* kell kiszámítani.



Itt az első két réteg látható ...

Wavelet-felbontás



... itt pedig a következő három, majd a kép megmaradó része. A kép „élességét” adó információt a kis léptékű rétegek hordozzák.

Multiscale Linear Transform



Az imént leírt algoritmust használtuk 5 réteg segítségével. Két részletet érdemes kinagyítani.

A részletek élessége

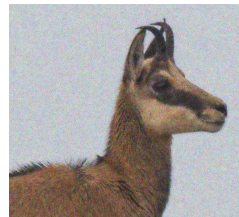
Bal oldal: Gaussian Blur.



Jobb oldal: MLT.



A MLT több részletet meghagy, és ugyanannyira zavaró a zaj.



Total Gradient Variation Denoising



Ez egy másik algoritmus eredménye, agresszív paraméterekkel.
www.lightvortexastronomy.com/tutorial-noise-reduction.html

5. További alkalmazások

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fourier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban: az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (*kvantálás*). (A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

Probléma: a Gibbs-jelenség. Nem folytonos (szakadó) függvény transzformáltja nem ad „szép” eredményt.

A képet 8×8 -as blokkokra vágjuk, ezeken belül már „sima”. Mivel \mathbb{Z}_n^+ -ban mod n számolunk, az is „szakadás”, ha a blokk két szemközti szélén nagy a kontraszt eltérése.

Megoldás: Diszkrét Fourier-transzformáció helyett *diszkrét koszinusz transzformáció*.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az \mathbf{x} jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben. A kapott \mathbf{y} már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$. Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük. Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú \mathbf{z} sorozatot kapunk.

Példa: $abc \rightarrow abccba \rightarrow 0a0b0c0b0n0a$.

Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j -re.

Ha $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{Z}$, akkor $\bar{\mathbf{Z}}$ inverz transzformáltja $(\dots, \bar{z}_{g-1}, \dots)$.

Mivel z_j valós, ezért $\bar{z}_{g-1} = z_g$ a fenti szimmetria miatt. Vagyis $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$, más szóval a transzformált is valós számsorozat.

Most $G = \mathbb{Z}_{4n}^+$; ha $\varepsilon = e^{2\pi i/(4n)}$ és $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, akkor $z_k = z_{4n-k}$ miatt $Z_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{4n-1} \chi_k(j) z_j = 2 \sum_{j=0}^{2n-1} z_j \cos(2\pi jk/(4n)) = 2 \sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos(\pi k(m + (1/2))/n)$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k -t: $Z_k = 2 \sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos(\pi k(m + (1/2))/n)$.

Mivel $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.

Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.

Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.

Így $\mathbf{Z} = (Z_0, \dots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k -t.

Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{Z}$ lineáris transzformáció \mathbb{R}^n -ből \mathbb{R}^n -be a *diszkrét koszinusz transzformáció (DCT)*. Inverze $x_j = (1/n) [Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos(\pi k(j + (1/2))/n)]$.

Bizonyítás: $x_j = z_{2j+1}$ kiszámításához a $z_g = (1/n) \sum_{\chi \in G} \chi(g) Z_\chi$ képletet használjuk: $z_m = (1/(4n)) \sum_{k=0}^{4n-1} \varepsilon^{mk} Z_k$. Ha $1 \leq k < n$, akkor Z_k együtthatója $\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{m(4n-k)} - \varepsilon^{m(k+2n)} - \varepsilon^{m(4n-(k+2n))} = \varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk} - \varepsilon^{2nm}(\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk}) = 4 \cos(\pi mk/(2n))$ páratlan m -re, mert $\varepsilon^{2n} = -1$. A Z_0 együtthatója $\varepsilon^{m \cdot 0} - \varepsilon^{m \cdot 2n} = 2$. \square

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j -edik sorának k -adik eleme $\cos(\pi k(j + (1/2))/n)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n - 1$ -ig számozzuk), akkor $\mathbf{x}^T \rightarrow \mathbf{Z}^T = 2S^T \mathbf{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)S\mathbf{Z}^T$ nem teljesen \mathbf{x}^T , mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$ -del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$ -vel, az eredmény legyen R .

Ekkor $2R^T \mathbf{x}^T$ -ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni.

Ezért $(2/n)RR^T \mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A JPEG tömörítés lépései:

- DCT a 8×8 -as blokkokon.
- Kvantálás (a tömörítés lényeges lépése).
- Huffman-kódolás (veszteségmentes tömörítés).

Progresszív tömörítés: először csak az alacsonyabb frekvenciájú komponenseket küldjük el. Az átjövő kép egyre élesebb lesz.

6. Keretek és csoportok

Redundáns koordinátázás

Ha $\mathbf{X}^T = S^* \mathbf{x}^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata \mathbf{x} -nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert *keretnek* (frame) nevezünk.

Példa

Vegyünk a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor (x_1, x_2) transzformáltja $(1/2)(2x_1, -x_2 + \sqrt{3}x_2, -x_2 - \sqrt{3}x_2)$.

Előnyök

- Ez egyfajta hibajavító kódolás.
- Több információt kaphatunk az eredeti jelről.

Irodalom: short-time (windowed) Fourier-transform, Gabor-frame. (Gábor Dénes).

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $GL(d, \mathbb{C})$ -ben. Ez mátrixszorzással hat \mathbb{C}^d vektorain. A hatás *irreducibilis*, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer \mathbb{C}^d -ben (kivéve $\{0\}$).

(Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120^\circ$ -os forgatások csoportjából származik.

Legyen $T : (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \dots, x_{d-2})$ (*időeltolás*).

Ha $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$ és $\mathcal{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{d-1}) = (X_{d-1}, X_0, \dots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (*fáziseltolás*).

HF: Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i \sin(2\pi/d)$. A T és W által generált G részcsoport irreducibilis \mathbb{C}^d -n, T és W rendje d , továbbá $T^{-1}WT = \varepsilon W$ és G rendje d^3 .

A Gabor-keret ennek a skalármátrixok normálosztója szerinti faktorából származtatható.

7. Vizsgatematika

Definíciók (csoportok és gyűrűk)

Csoportok

Csoport, gyűrű additív és multiplikatív csoportja. \mathbb{Z}_n^+ és \mathbb{Z}_n^\times . Szimmetrikus és alternáló csoport, diéder- és kvaterniócsoport. Lineáris csoportok: $GL(n, T)$, $SL(n, T)$, $SO(n)$, unitér csoport. Elemrend, ciklikus csoport. Homomorfizmus, automorfizmus. Direkt szorzat, projekció. Klein-csoport. Cayley-táblázat. Részcsoport, generált részcsoport. Mellékosztály, index. Permutációcsoport, fixpont, pálya, stabilizátor. Csoportthatás. Normálosztó, faktorcsoport. Egyszerű csoport. Konjugált osztály.

Gyűrűk

A kvaterniók ferdeteste. Generált részgyűrű, direkt szorzat. Ideál, balideál, generált ideál. Egyszerű gyűrű. Faktorgyűrű. Főideál-, euklideszi és alaptételes gyűrű. Karakterisztika, prímtest.

Definíciók (testek és kódok)

Testek

Testbővítés, foka, közbülső test, generált résztest, egyszerű bővítés. Algebrai és transzcendens elem, minimálpolinom, elem foka. Véges, algebrai és normális bővítés. Felbontási test. Algebrai zárttság. Primitív polinom véges test fölött. Algebra test fölött. Algebra elemének minimálpolinomja.

Kódelmélet

Hibajelzés és -javítás. Hamming-távolság. Perfekt kód. Lineáris és polinomkód. Reed-Solomon, BCH- és ciklikus kód.

Bizonyítások a vizsga harmadik részében 1 (kötelező)

Ciklikus csoport részcsoportjai és elemrendjei (4.3.24, 26 és 27).
A mellékosztályok diszjunktak (4.4.13).
Csoportok csak két részcsoporttal (4.4.23).
A pálya-stabilizátor tétel (4.5.3 és 4.5.8).
A Burnside-lemma (4.5.30).
A faktorcsoport szorzásának jóldefiniáltsága (4.7).
Elemrend a faktorcsoportban (4.7.20).
Szükséges feltétel primitív gyök létezésére (4.9.10).
A direkt szorzat belső jellemzése (4.8.25, 4.9.12).
 p exponensű nemkommutatív csoport (4.11.12).
Véges nullosztómentes gyűrű test (5.3.5).
Minden euklideszi gyűrű főideálgyűrű (5.5.3).
Kommutatív, egységelemes, egyszerű gyűrű test (5.3.9).
Polinomgyűrű faktora mikor test (5.2.9).
Egyszerű testbővítés konstrukciója (6.4.3).

Bizonyítások a vizsga harmadik részében 2 (kötelező)

Gyűrű karakterisztikája prím vagy 0 (5.8.2).
Prímtest jellemzése (5.8.7).
A Frobenius-endomorfizmus (5.8.4).
Minimálpolinom felismerése nullosztómentes algebrában (5.10.12).
Egyszerű testbővítés szerkezete (6.1.16).
A bővítések fokának szorzástétele (6.2.3).
Az algebrai számok testet alkotnak (6.2.12).
Az algebrai számok teste algebrailag zárt (6.2.13).
A felbontási test normális bővítés (6.3.4).
Véges test elemszáma prímhatvány (6.7.2).
Véges test multiplikatív csoportja ciklikus (4.3.22).
Véges test konstrukciója és egyértelműsége (6.7.5).
Véges test résztestei (6.7.8).
Irreducibilis polinomok létezése véges test fölött (6.7.9 és 10).
Polinomkód minimális távolságának becslése (9.3.3).

A többi tétel (csoportok)

Elemrend és paritás leolvasása a ciklusfelbontásból. Permutáció konjugáltjának képlete. A diédercsoport számolási szabályai. Elemrend és jó kitevő, a hatvány rendjének képlete. Lagrange tétele részcsoportha és elemre. Bal- és jobb index. Ekvivalencia-reláció, kapcsolat a pályákkal és a mellékosztályokkal. Generált részcsoportha elemei Abel-csoportban és általában. Homomorfizmus magja normálosztó, képe részcsoportha. Természetes homomorfizmus, homomorfizmus-tétel. 2 indexű részcsoportha normálosztó. Jellemzés konjugáltosztályokkal. A konjugálás automorfizmus. S_n generálható két elemmel. Elemrend direkt szorzatban. A \mathbb{Z}_n^\times csoport direkt felbontása. Primitív gyök létezésének szükséges és elégséges feltétele. A véges Abel-csoportok alaptétele. Cayley tétele. Kis elemszámú csoportok: 4, 6, 8, p , $2p$, p^2 (p prím). Egyszerű csoportok: $A(n)$ ($n \geq 5$), $SO(3)$. Feit-Thompson tétel.

A többi tétel (gyűrűk és testek)

A generált részgyűrű elemei kommutatív és egységelemes gyűrűben. Kvaternió konjugáltja és normája, az $x^2 = -1$ megoldásai. Főideál és legnagyobb közös osztó. Főideálgyűrű alaptételes. Test ideáljai. Balideálmentes gyűrűk. Wedderburn tétele. Egyszerű transzcendens bővítés elemei. e , π , $2^{\sqrt{3}}$ transzcendens. Nulla karakterisztikában minden véges bővítés egyszerű. Elem fokos osztója a bővítés fokának. Összeg és szorzat fokos. Algebrailag zárt bővítés létezése. A felbontási test egyértelműsége. A geometriai szerkeszthetőség jellemzése (6.8.15). A többszörös gyökök és a derivált kapcsolata. Frobenius tétele. A t -hibajelzés és hibajavítás jellemzése Hamming-távolsággal. Hamming- és Singleton-korlát. Paritásellenőrző mátrix (9.2.7).