Bsc algebra3a gyakorlat

Első zárthelyi (2018. november 9.) — eredmények és pontozás

1. Hatodrendű elem csak $(abc)(de)(fg)$ vagy $(abcdef)(gh)$ alakú lehet (1+1 pont). Az első típusúak száma $2\binom{8}{3}3\binom{5}{4}$ (3 pont), a második típusúaké $5!\binom{8}{6}$ (2 pont).

2. Nem lehet a prímhatvány rendű direkt tényezők között 4-nél nagyobb rendű ciklikus, mert azokban volna 8 rendű elem, és így az egészben is (3 pont). Ezért a lehetőségek: $(\mathbb{Z}_2^+)^5$, $(\mathbb{Z}_2^+)^3 \times \mathbb{Z}_4^+$ és $\mathbb{Z}_2^+ \times (\mathbb{Z}_4^+)^2$ (3 pont).

3. Legyen a behúzott testátló AB. Ekkor A csak A-ba és B-be mehet (2 pont). Ha A fix, akkor A három élszomszédja permutálódik, azaz egy C szomszéd 3 helyre mehet (2 pont). Ha C is fix, akkor A másik két szomszédja cserélődhet, de ha az is fix, akkor már minden csúcs fix. Ezért az eredmény $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ (2 pont). (Maga a csoport $S_3 \times \mathbb{Z}_2^+$-szal izomorf.)

4. Összesen $3^4 = 81$ színezés van, ezek az identitás fixpontjai (1 pont). Egy 90 fokos forgatásnak egy színezés csak akkor lehet fixpontja, ha mindegyik él egyforma színű, ez 3 lehetőség (1 pont). A középpontos tükrözésnek egy színezés akkor szimmetriája, ha vagy mindegyik él egyszínű, vagy a szemközti élek egyforma színűek, ez összesen $3 + 6$ lehetőség (2 pont). Átlóra tükrözésnél ugyanez a helyzet: a szimmetrikusan elhelyezkedő élek színe egyforma kell, hogy legyen (1 pont). Ha oldalfelezőre tükrözünk, akkor a tengelyt metsző oldalak színe bármi lehet, a másik kettőé egyenlő, ez 3^3 lehetőség (1 pont). Ezért az eredmény $(81 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 27)/8$ (1 pont).

5. Ez a D_5 diédercsoport: ha a szabályos ötszög csúcsait körbe számozzuk, akkor $f = (12345)$ és $t = (25)(34)$ az 1-es csúcson átmenő tengelyre való tükrözés (és tudjuk, hogy ez a két transzformáció a D_5-öt generálja).

6. Mivel g felcserélhető G minden elemével (hiszen f^2 felcserélhető D_4 elemeivel, $\mathbb{Z}_2^+$ pedig kommutatív), ezért $\{g\}$ konjugált osztály, azaz $N = \{(id, 0), g\}$. A faktorcsoport tehát 8 elemű. A G csoportban minden elem négyzete az egységelem, kivéve azokat, amelyek első komponense negyedrendű, ezek $(f, 0)$, $(f, 1)$, $(f^3, 0)$, $(f^3, 1)$. Mindegyiknek a négyzete $(f^2, 0)$, ami nincs N-ben, ezért mindegyik mellékosztálya negyedrendű G/N-ben. Ez azonban csak két mellékosztály, mert $(f^3, 0)(f, 1)^{-1}$ és $(f^3, 1)(f, 0)^{-1}$ benne van N-ben. Ezért G/N-ben két negyedrendű elem van, és 5 másodrendű. Ez az öt nyolcadrendű csoport küzül csak a D_4-re igaz, tehát ez lesz G/N-nel izomorf. Így G/N nem kommutatív. Közvetlenül is látszik, hogy $a = (f, 0)N$ és $b = (t, 0)N$ nem felcserélhető elemei G/N-nek, hiszen $ab = (ft, 0)N$, $ba = (tf, 0)N$, és $\big((ft)(tf)^{-1}, 0\big) = (f^2, 0) \notin N$.