

Bsc algebra3a gyakorlat

Hatodik feladatsor

- (K5.1.7)** Legyen I egy T test fölötti $n \times n$ -es mátrixgyűrűben azoknak a mátrixoknak a halmaza, melyeknek az első oszlopa végig nulla. Balideál-e, illetve jobbideál-e ez?
- (K5.5.7, 5.5.11)** Főideál-e $\mathbb{Z}[x]$ -ben $(2, x)$, $(x + 1, x + 2)$ illetve $(2x + 2, x + 4)$?
- (K5.1.25)** Adjunk példát egy-egy olyan részgyűrűre a $\mathbb{Q}[x]$, illetve a $\mathbb{Z}[x]$ polinomgyűrűkben, amely nem ideál, de tartalmaz minden n -re n -edfokú polinomot.
- (K5.3.16)** Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a \mathbb{Z}_m gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?
- (K5.2.14)** Készítsük el az alábbi faktorgyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint. (Ha n egész, akkor nR az R gyűrű $\{nr : r \in R\}$ részgyűrűjét jelöli.) $\mathbb{Z}_4/\{0\}$, $\mathbb{Z}_8/\{0, 4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0, 4, 8, 12\}$, $2\mathbb{Z}/(8)$, $2\mathbb{Z}_{16}/(8)$, $\mathbb{Z}/(4)$, $4\mathbb{Z}/(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4, x)$.
- (K5.3.19)** Igazoljuk, hogy egy T test fölötti $n \times n$ -es felső háromszög-mátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a T^n direkt hatvánnyal izomorf.
- (K5.2.15)** A $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$ -ben mi az $x + (x^2 + x + 1)$ inverze?
- (K5.2.10)** Írjuk föl az $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ faktorgyűrű műveleti tábláit, és igazoljuk, hogy testet kaptunk. Keressünk benne \mathbb{Z}_2 -vel izomorf $\{O, E\}$ résztestet (ahol E az egységelem, O a nullelem), és adjuk meg L -ben az $Ex^2 + Ex + E$ polinom gyökeit.
- (K5.2.18)** Melyek igazak: $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{G}/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ (\mathbb{G} a Gauss-egészek), $\mathbb{G}/(3) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$, $\mathbb{C}[x, y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$.
- (K5.3.3, 5.3.18*)** Igazoljuk, hogy ha T test, akkor a $T^{n \times n}$ teljes mátrixgyűrű egyszerű gyűrű. Ha R egységelemes, akkor írjuk le $R^{n \times n}$ ideáljait.
- (K8.7.10*)** Legyen T test, $R = T^{n \times n}$ és W altere T^n -nek. Bizonyítsuk be, hogy $\{M \in R : (\forall w \in W)(Mw = 0)\}$ balideál R -ben, minden balideál megkapható így, és ez a megfeleltetés az alterek és balideálok között bijektív.
- (K8.7.12*)** Legyen T test, $R = T^{n \times n}$ és W altere T^n -nek. Bizonyítsuk be, hogy $\{M \in R : M \text{ minden sora } W\text{-beli}\}$ balideál R -ben, minden balideál megkapható így, és ez a megfeleltetés az alterek és balideálok között bijektív.
- (K5.2.19*)** Lehet-e egy nullosztómentes, de nem egységelemes gyűrű faktorgyűrűje egységelemes? Lehet-e egy nullosztómentes gyűrű faktora nem nullosztómentes? És fordítva?
- (K5.1.32*)** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.
- (K5.1.29*)** Mutassuk meg, hogy ha egy gyűrűben csak egyetlen bal oldali egységelem van, akkor ez kétoldali egységelem.
- (K5.5.16*)** Van-e $\mathbb{Z}[x]$ -ben olyan ideál, amely nem generálható 1000 elemmel?
- (K5.8.14*)** Tegyük föl, hogy a T test p karakterisztikája nem osztja az $n > 0$ egészet ($p = 0$ is megengedett). Mutassuk meg, hogy egy $\varepsilon \in T$ elem akkor és csak akkor gyöke a $\Phi_n(x) \in T[x]$ körosztási polinomnak, ha ε rendje n a T multiplikatív csoportjában.