Bsc algebra3a gyakorlat

Ötödik feladatsor

1. ***(K4.9.22)*** Adjuk meg a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoport összes negyedrendű elemét.

2. ***(K4.9.23)*** Mutassuk meg az elemek rendjeinek kiszámításával, hogy a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ és a $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoportok nem izomorfak.

3. ***(K4.9.24)*** A véges Abel-csoportok alaptételének segítségével döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.

4. ***(K4.9.25)*** Az alábbi csoportok közül melyek bonthatók föl direkt szorzatra? Igenlő válasz esetén adjunk meg egy felbontást: $\mathbb{Z}_6^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$, S_3, D_4, D_6, Q, A_4, S_5.

5. ***(K4.9.26)*** Hányféleképpen bontható föl két nemtriviális normálosztójának direkt szorzatára a $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ csoport?

6. ***(K4.9.30)*** Adjunk meg S_8-ban $S_4 \times S_4$-gyel izomorf részcsoportot.

7. ***(K4.9.13)*** Igazoljuk, hogy a gömb szimmetriacsoportja, azaz $\mathrm{O}(3)$ izomorf az $\mathrm{SO}(3)$ és a $\mathbb{Z}_2^+$ csoportok direkt szorzatával.

8. Bontsuk föl a $\mathbb{Z}_{11}^\times$ csoportot két prímhatványrendű ciklikus részcsoport direkt szorzatára. Adjuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_{36}^\times$ csoport prímhatványrendű ciklikusakra való felbontásában milyen rendű tényezők szerepelnek.

9. ***(K4.3.28)*** Az $\mathbb{R}^\times$, az $\mathbb{R}^+$ és a $\mathbb{C}^\times$ csoportok között van-e izomorf?

10. ***(K4.5.25)*** Osztályozzuk az alábbi csoportokat aszerint, hogy melyek izomorfak közülük: $\mathbb{Z}_2^+$, $\mathbb{Z}_3^+$, $\mathbb{Z}_4^+$, $\mathbb{Z}_8^+$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q (a kvaterniócsoport), $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

11. ***(K4.5.35)*** Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 3$, akkor az A_n alternáló csoportban minden pont stabilizátora A_{n-1}-gyel izomorf.

12. ***(K4.4.30)*** Legyen H részcsoportja a G csoportnak és $g \in G$. Igazoljuk, hogy a gHg^{-1} komplexusszorzat is részcsoport (ez a H-nak a g-vel vett konjugáltja), mely H-val izomorf.

13. ***(K4.5.39)*** Keressük meg S_4-nek azt a részcsoportját, amit a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz rendel. Tegyük meg ugyanezt a D_3 csoporttal is S_6-ban.

14. ***(K4.8.37)*** Legyen G tizedrendű nemkommutatív csoport. Bizonyítsuk be a következő állításokat, majd általánosítsunk arra az esetre, ha G rendje egy páratlan prím kétszerese.

(1) G-ben nincs tizedrendű elem.
(2) G-ben nem lehet minden elem másodrendű.
(3) G-ben van másodrendű elem.
(4) Ötödrendű elem nem lehet fölcserélhető másodrendű elemmel.
(5) G generálható két másodrendű elemmel.
(6) $G \cong D_5$.

15. ***(K4.8.40)*** Legyen $N = \{e, a\}$ kételemű normálosztó a G csoportban. Igazoljuk, hogy minden $g \in G$-re $ga = ag$.

16. ***(K4.8.39)*** Mutassuk meg, hogy az eltolások normálosztót alkotnak a sík egybevágósági transzformációinak $\mathrm{E}(2)$ csoportjában, és a szerinte vett faktor az $\mathrm{O}(2)$ csoporttal izomorf.

17. ***(K4.8.45**)*** Mely véges csoportoknak van olyan másodrendű automorfizmusa, amelynek egyetlen fixpontja az egységelem?