1. Bevezetés

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- *Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába*
  `www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil`
- `http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas`
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, kiegészítő irodalom
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok
- Az előadáson figyelni érdemes, ***nem jegyzetelni!***
  - Ez a prezentáció definiálja a vizsgakövetelményeket.
  - Nyomtatható változat is letölthető.
  - Hivatkozások a tankönyvre, ahol magyarázatok is vannak.

A számonkérés módja

- *A gyakorlati jegy:*
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium);
    Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- *A vizsgajegy:*
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri.
  - Az első rész: beugró a röpdolgozatok anyagából.
  - A második rész rész: a megértést ellenőrző kérdések.
  - A harmadik rész: egy bizonyítás, amit *kötelező* tudni.

2. Kristályok szimmetriái

Háromszög-szimmetria

Rubin
aluminium-oxid: Al_2O_3

Zafir
aluminium-oxid: Al_2O_3

Kalcit
kalcium-karbonát: $CaCO_3$

Hematit
vasoxid: Fe_2O_3

Ametiszt
szilicium-dioxid: SiO_2

Kvarc
szilicium-dioxid: SiO_2

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát): $Be_3Al_2(SiO_3)_6$
Egy szimmetriatengely körüli 60°-os elforgatás.

Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Kocka–oktaéder-szimmetria

Összesen 48 szimmetria.

Galenit
ólom-szulfid: PbS

Gyémánt
szén: C

Fluorit
kalcium-fluorid: CaF_2

3. Szimmetriák a fizikában

A bolygómozgás szimmetriája

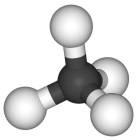
C.5.2. Példa: ekliptika
A bolygók keringése során a bolygó *energiája*, *perdületének nagysága* és *iránya* nem változik a mozgás során. A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy *síkot* határoz meg, melyre a kiindulóállapot *szimmetrikus*. Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus, azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

C.5.4. Tétel
Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van *a téridő szimmetriái* és a fizika *megmaradó mennyiségei* (lendület, energia, perdület) között.

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

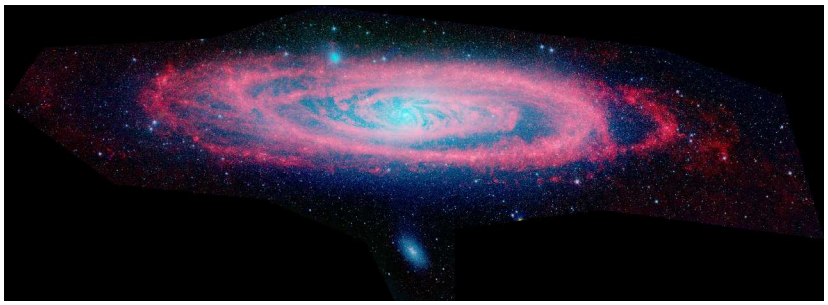
Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).



Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat két vagy három komponensre bontja szét. Oka: mágneses térben *megszűnnek egyes szimmetriák*.
Matematikai apparátus: a szimmetriák *csoportján* alapul.

Lorentz-transzformációk

A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit a *Lorentz-transzformációk* adják meg.



Lásd Kiss-jegyzet, 4.1. és C.6. szakasz. A C.7. szakaszban az Andromeda-ködbe is elutazunk. A fenti kép az infravörös tartományban készült.

4. Matematikai alkalmazások

Kártyakeverés

„*Emelés*": a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel
Ha mindkét mozdulatot 1/2 valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, *véletlenszerűen* alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag *jól megkeveredik*, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az 1/2 helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek (csak ki lehessen keverni belőlük minden sorrendet). Bizonyítás: ugyanaz az apparátus, mint a metánmolekulánál.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872). Általános vezérlő elv: milyen *szimmetriák* érvényesek. A „helyes" fogalmak ezek „nyelvén" definiálhatók.

Projektív geometriában az *egyenestartó* transzformációk. Ilyen például a *vetítés* (fényképzés, panorámaképek illesztése).

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák
Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím). Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható. Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele
Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)
Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;
- *csoportkarakterek* véges kommutatív csoportokra.

Szalay Mihály: Számelmélet (középiskolai tagozatos tankönyv).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak" számító megoldások: *Burnside-lemma*).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (*homológiacsoportok*).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (*Lie-csoportok*).
- Képtömörítés wavelet-ek segítségével, Fast Fourier Transform.

A csoportelmélet rendkívül mély! A *véges egyszerű csoportok osztályozásának* bizonyítása több, mint *tízezer* oldal! Alkalmazásai: kombinatorikában, *algoritmuselméletben*.

5. A csoport fogalma

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció
A G nem üres halmaz *csoport*, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet *asszociatív*, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g*h)*k = g*(h*k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali *neutrális elem*, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re; (HF: csak egy neutrális elem lehet)

(3) minden $g \in G$-nek van kétoldali g^{-1} *inverze*, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$. (HF: minden elemnek csak egy inverze lehet)

Kommutatív csoport, vagy *Abel*-csoport:

(4) a $*$ *kommutatív*, azaz minden $g, h \in G$ esetén $g * h = h * g$.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett *egymás mellé írás*, neve *szorzás*. A neutrális elem neve *egységelem*, jele 1. A g és h *fölcserélhető*, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve *összeadás*. A neutrális elem neve *nullelem*, jele 0. Az inverz neve *ellentett*, jele $-g$.
A *kivonás* az ellentett hozzáadása: $g - h = g + (-h)$.

Asszociatív műveletnél egy *sokténye zős* szorzatot akárhogy zárójelezünk, ugyanazt kapjuk (2.2.2. Feladat). Ha kommutatív is, akkor a tényezők sorrendje sem számít (2.2.5. Feladat).

6. Példák csoportokra

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R *additív csoportja*, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R *multiplikatív csoportja*, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű *egységei*).

$\left(T^{n\times n}\right)^\times$ elemei a nem nulla determinánsú mátrixok. E csoport neve *általános lineáris csoport*, jele $\mathrm{GL}(n, T)$.

HF: A $\mathbb{Z}_n^\times$ csoport elemei $0, 1, \ldots, n-1$ közül az n-hez *relatív prím* számok (2.2.3. Feladat). Speciálisan $\mathbb{Z}_p^\times$ elemszáma $p-1$, ha p prím.

A kvaterniócsoport

4.5.21. Gyakorlat
Elemek: ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,
$ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, viszont $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.
Az asszociativitás ellenőrzése mátrixokkal a gyűrűknél.

Q	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ *kölcsönösen egyértelmű* leképezéseket X *transzformációinak* nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A *lineáris transzformációk* között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább *permutációkról* beszélünk.

Ismétlés
Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$. $f \circ g$ az f és g *kompozíciója* vagy *szorzata*, jele néha fg. Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív. Az identitás egységelem: $id(x) = x$ minden $x \in X$-re. Minden $f \in S_X$ függvénynek van kétoldali inverze: $h = f^{-1}$ azt jelenti, hogy $f(x) = y \iff h(y) = x$. Ezért S_X csoport a kompozícióra. Neve: *szimmetrikus csoport*.

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció
Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: *ciklus*, melynek *hossza* k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Tétel (4.2.21. és 4.2.22)
Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

Példa: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} = (14752)(39)$.

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény
Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a *páros hosszú* ciklusok száma *páratlan*.

Bizonyítás
HF: $(x_1 \dots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\dots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$.
Azaz egy k hosszú ciklus $k-1$ darab transzpozíció szorzata. Használjuk föl, hogy $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. □

4.8.14. Gyakorlat, HF
Ha $f \in S_n$, akkor $f(x_1 \dots x_k)f^{-1} = \big(f(x_1) \dots f(x_k)\big)$, így ha $g \in S_n$, akkor g és fgf^{-1} ugyanannyi, ugyanolyan hosszú ciklusból áll.

7. Szimmetriacsoportok

A háromszögek szimmetriái

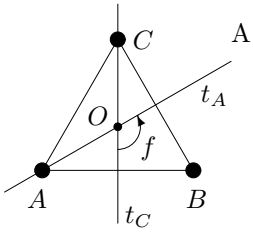
Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor *tükrözés* az alap felező merőlegesére. Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három *forgatás*: a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal. Ez utóbbi (az *identitás*) minden háromszögnek megvan.

Definíció
A háromszög szimmetriája a sík egy olyan *egybevágósági transzformációja*, ami a háromszöget önmagába képzi. Ilyenek kompozíciója és inverze is ilyen. Ezért *a szimmetriák csoportot alkotnak*.

HF: A szabályos háromszögnek csak e hat szimmetriája van.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A =?\quad A \mapsto A \mapsto B;\quad B \mapsto C \mapsto A;\quad C \mapsto B \mapsto C$. Azaz t_C.
$t_C t_A =?$ Forgatás a tengelyek szögének kétszeresével. Azaz f.

Cayley-táblázat

A csoport *szorzástáblája* (*Cayley*-táblázat): A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id,\quad t^2 = id,\quad tft = f^{-1}(= f^2)$.
Példa: $t_B t_C = (tf)(tf^2) = (tft)f^2 = f^{-1}f^2 = f$.

A diédercsoport
A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n *diédercsoport*.

Tétel (4.1.23. Állítás)
Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás, t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$ (az első n transzformáció *forgatás*, a többi *tengelyes tükrözés*). A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1,\quad t^2 = 1,\quad tf^i t = f^{-i}$ összefüggések. Ezekből minden szorzat kiszámítható:

$$f^i f^j = f^{i+j}\,, \qquad (tf^i)f^j = tf^{i+j}\,,$$
$$f^i(tf^j) = tf^{j-i}\,, \qquad (tf^i)(tf^j) = f^{j-i}\,,$$

ahol az f kitevőjében a $+$ és a $-$ jelek a mod n műveleteket jelentik. A tf^i elemek mindegyikének önmaga az inverze. □

A kör és a gömb szimmetriacsoportja
A kör szimmetriacsoportjának jele O(2).

Állítás (lásd 4.1. szakasz)
Az O(2) elemei a középpont körüli α szögű f_α *forgatások*, továbbá az átmérőkre való *tengelyes tükrözések*. Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod 360° értendő). Ha $t \in$ O(2) tükrözés, akkor $tf_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$. A tf_α és $f_\alpha t$ is tükrözés, két tükrözés szorzata pedig forgatás. □

A gömb szimmetriacsoportjának jele O(3).

Tétel (4.1.29. Feladat)
Az O(3) *irányítástartó* elemei a középponton átmenő egyenesek körüli forgatások. A gömb többi szimmetriája egy ilyen forgatásnak és az xy síkra való tükrözésnek a szorzata.

A sík „szimmetriái"
E(2), illetve E(3) jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás
A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az *identitás*: minden pont *fixpont* ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus *eltolások*: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus *forgatások*: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) *Tengelyes tükrözések*: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) *Csúsztatva tükrözések* (egy tengelyre tükrözünk, utána a tengellyel párhuzamosan eltolunk): nincs fixpontjuk.

Az eltolások és a forgatások *mozgások* (irányítástartók), a tükrözések és a csúsztatva tükrözések nem. Minden egybevágóság előáll legfeljebb három tükrözés szorzataként.

8. Izomorf csoportok

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$. Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet. Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b*b=1$. Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^+$	0	1
0	0	1
1	1	0

E csoportok *teljesen EGYFORMA SZERKEZETŰEK*!
Képlettel: $\psi : 1 \mapsto id,\ -1 \mapsto (12)$ *bijektív* és *művelettartó*: $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$.
Például $\psi\big((-1)(-1)\big) = id = \psi(-1)\psi(-1)$.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció
Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre. A $\psi : G \to H$ leképezés *csoporthomomorfizmus*, ha *művelettartó*: $\psi(a*b) = \psi(a)\bullet\psi(b)$ minden $a, b \in G$-re. Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között, akkor ψ *izomorfizmus*. A G és a H *izomorf csoportok*, ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra, H a pozitív valós számok a szorzásra, $\psi(g) = 10^g$.

(2) G a sík P pontja körüli forgatások a kompozícióra, H a sík Q pontja körüli forgatások a kompozícióra, $\psi(g) = fgf^{-1}$, ahol f eltolás $\overrightarrow{PQ}$-val.

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez művelettartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$, így $\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$.
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

$\mathbb{Z}_5^\times$ *és* $\mathbb{Z}_8^\times$ *nem izomorfak*, mert utóbbinál $g * g = 1$ minden g-re, a másikban pedig nem (a két táblázat főátlójában látszik).

HF: izomorfizmusnál egységelem képe egységelem.

9. Elemrend

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció
Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész. Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot. Ez az a elem n-edik *hatványa*. Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk. Ez az a elem n-szerese (*többszörös*).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$. Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$. Ha a-nak van egy b ellentettje, akkor legyen $(-n)a = nb$.

Értelmeztük az *egész kitevőjű* hatvány (többszörös) fogalmát.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás
Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b *felcserélhetők* ($ab = ba$), akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

Bizonyítás
Pozitív kitevőkre egyszerű leszámlálás. A többi esetben esetszétválasztás (HF).

Ismétlés

1.5. szakasz
Egy z komplex szám *rendje* a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n *jó kitevője* z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(z) \neq \infty$ esetén $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$, speciálisan $z^k = 1 \iff o(z) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

(4) A hatvány rendjének képlete: $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

(5) A $z = 1$ az egyetlen olyan szám, melynek a rendje 1.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat
Egy g csoportelem *rendje* a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n *jó kitevője* g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(g) \neq \infty$ esetén $g^k = g^\ell \iff o(g) \mid k - \ell$, speciálisan $g^k = 1 \iff o(g) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

(4) A hatvány rendjének képlete: $o(g^k) = \dfrac{o(g)}{(o(g), k)}$.

(5) A $g = 1$ az egyetlen olyan elem, melynek a rendje 1. □

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $\quad 2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, $\quad$ de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$.
Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n, k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást).
$k360°$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális. Ha $k = p/q$ egyszerűsíthetetlen tört, akkor a rend q.

HF (4.3.16): Ha $\psi : G \to H$ izomorfizmus, akkor *megőrzi az elemrendet*, azaz minden $g \in G$-re g és $\psi(g)$ rendje ugyanaz. Ezért $\mathbb{Z}_5^\times$ *nem izomorf* $\mathbb{Z}_8^\times$*-cal*, mert $\mathbb{Z}_5^\times$-ben csak egy másodrendű elem van, $\mathbb{Z}_8^\times$-ben pedig három.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás
Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ *ciklus rendje* k, vagyis *a hossza*. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$. *FONTOS*: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás
Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$. De $f^k = id$, mert a ciklus minden eleme egyszer „körbemegy". Legyen $g = g_1 \dots g_m$, ahol $g_1, \dots, g_m$ diszjunkt ciklusok. Ekkor $g^\ell = id \iff g_j^\ell = id$ *minden* j*-re*, mert ezek a ciklusok diszjunkt halmazokat mozgatnak. De $g_j^\ell = id \iff g_j$ rendje (vagyis a hossza) osztója ℓ-nek. Tehát g jó kitevői a g_j ciklusok hosszainak közös többszörösei. □

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció
A G csoport *ciklikus*, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy *generátora*.

$\mathbb{Z}_5^\times$ *ciklikus*, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ *nem ciklikus*, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ *ciklikus*, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ *ciklikus*, például az 1 generálja.

4.3.20. Tétel
G ciklikus $\iff G \cong \mathbb{Z}^+$ vagy $G \cong \mathbb{Z}_n^+$.

Valóban: ha G ciklikus és g generálja, akkor legyen $n = o(g)$.
Ha $n < \infty$, akkor $\psi : \mathbb{Z}_n^+ \to G$, $\psi(k) = g^k$ izomorfizmus.
Ha $n = \infty$, akkor $\psi : \mathbb{Z}^+ \to G$, $\psi(k) = g^k$ izomorfizmus. □

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás
Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van. Minden csoportelem rendje osztója n-nek. Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás
Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n,k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt. De g^d akkor generátor, ha rendje n, azaz ha $(n,k) = 1$. Az ilyenek száma $\varphi(n)$. A harmadik állítás következik egy későbbi tételből.

4.3.22. Tétel (nehéz)
Véges test multiplikatív csoportja ciklikus. Így $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z}_{p-1}^+$.