Algebra3, alkalmazott matematikus

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

3/11. előadás

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \dots, v_n \in V$ elemek által generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \dots, v_n$-et tartalmazza.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \dots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \dots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \dots, v_n \in W$

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a legszűkebb részcsoport, ami a g-t tartalmazza.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a legszűkebb részcsoport, ami a g-t tartalmazza. Azaz minden H részcsoportra, ha $g \in H$,

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által **generált részcsoport** elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a **legszűkebb** részcsoport, ami a g-t tartalmazza. Azaz minden H részcsoportra, ha $g \in H$, akkor $\langle g \rangle \subseteq H$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által **generált részcsoport** elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a **legszűkebb** részcsoport, ami a g-t tartalmazza. Azaz minden H részcsoportra, ha $g \in H$, akkor $\langle g \rangle \subseteq H$.

Mi legyen $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$?

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport a páros számok részcsoportja.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport a páros számok részcsoportja.
Kézenfekvő: $\langle 18, 26 \rangle =$ páros számok.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport a páros számok részcsoportja.
Kézenfekvő: $\langle 18, 26 \rangle =$ páros számok.

HF: Az m és n-et tartalmazó legszűkebb részcsoport az m és n legnagyobb közös osztójának többszöröseiből áll.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az *id* permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet. Ezért csak A_4-nél állhatunk le.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az *id* permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet. Ezért csak A_4-nél állhatunk le.

Vagyis az (123) és $(12)(34)$ permutációkat tartalmazó legszűkebb részcsoport az A_4 alternáló csoport.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet. Ezért csak A_4-nél állhatunk le.

Vagyis az (123) és $(12)(34)$ permutációkat tartalmazó legszűkebb részcsoport az A_4 alternáló csoport.
Kézenfekvő: $\langle (123), (12)(34) \rangle = A_4$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által
generált részcsoport

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek,

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által generált részcsoport a legszűkebb X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit,

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által generált részcsoport a legszűkebb X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G generátorrendszerének nevezzük

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is.
Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük

ha $\langle X \rangle = G$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által generált részcsoport a legszűkebb X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G generátorrendszerének nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X generálja G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X **generálja** G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

4.6.7. Állítás

A generált részcsoport egyértelműen létezik.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is.
Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X **generálja** G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

4.6.7. Állítás

A generált részcsoport egyértelműen létezik.
Úgy kapható, mint az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X **generálja** G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

4.6.7. Állítás

A generált részcsoport egyértelműen létezik.
Úgy kapható, mint az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.

Megjegyzés: az üres halmaz által generált részcsoport az egységelemből áll.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű,

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete. Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete. Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete). Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek,

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.
Egyértelműség: Ha H_1 és H_2 is ilyen, akkor $X \subseteq H_1$ és $X \subseteq H_2$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.
Egyértelműség: Ha H_1 és H_2 is ilyen, akkor $X \subseteq H_1$ és $X \subseteq H_2$.
A feltételt $K = H_2$-re alkalmazva $X \subseteq H_2 \implies H_1 \subseteq H_2$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.
Egyértelműség: Ha H_1 és H_2 is ilyen, akkor $X \subseteq H_1$ és $X \subseteq H_2$.
A feltételt $K = H_2$-re alkalmazva $X \subseteq H_2 \implies H_1 \subseteq H_2$.
Szerepcserével $H_2 \subseteq H_1$. $\square$

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \dots, g_n \in A$.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát,

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk") L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll,

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk") L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll, melyek fölírhatók az X elemeiből és azok inverzeiből képzett akárhány tényezős szorzatként

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll, melyek fölírhatók az X elemeiből és azok inverzeiből képzett akárhány tényezős szorzatként (X minden eleme többször is felhasználható egy ilyen szorzatban).

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll, melyek fölírhatók az X elemeiből és azok inverzeiből képzett akárhány tényezős szorzatként (X minden eleme többször is felhasználható egy ilyen szorzatban).

(Ide kapcsolódik a szabad csoportokól szóló 4.10.2. Tétel.)

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre,

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletttartó:

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletttartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletttartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

(4) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha t. tükrözés.

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

(4) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha t. tükrözés.

(5) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).

Izomorfizmus és homomorfizmus

4.3.1. Definíció (ismétlés)

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű, akkor ψ izomorfizmus.

4.7.7. Homomorfizmusok, amik nem izomorfizmusok

(1) $G = \mathbb{Z}^+$, $H = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(k) = k$ maradéka mod n.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(3) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

(4) $G = D_n$, $H = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha t. tükrözés.

(5) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).

(6) $G = \mathbb{R}[x]^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus, sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a „lényeget megőrző” leképezés.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a „lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a „lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az összes szorzatot nem tudjuk áttekinteni.

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés” a „lényeget megőrző” leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az összes szorzatot nem tudjuk áttekinteni. Az előjelképzés (homomorfizmus!) segít,

Az izomorfizmus és a homomorfizmus haszna

Az izomorfizmus azért hasznos, mert az egyformán viselkedő struktúrák közül csak egyet kell megértenünk.

Egy olyan homomorfizmus, amely nem izomorfizmus,
sokszor egy bonyolult struktúrát képez egy egyszerűbbe.
Az egyszerűbb struktúrában már tudunk dolgozni,
és ezzel információt nyerünk a bonyolultabbról is.
Ezt tesszük az életben is, folyamatok modellezésekor.
A „modellezés" a „lényeget megőrző" leképezés.

4.7.1 Kérdés

Előáll-e az (12) transzpozíció hármasciklusok szorzataként?

Az összes szorzatot nem tudjuk áttekinteni. Az előjelképzés (homomorfizmus!) segít, mert ± 1-gyel könnyű számolni.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi,

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$$\varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G).$$

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva)

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.
Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$. Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.
Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$.
Ekkor $\varphi(g)$ rendje osztója g rendjének.

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$. Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$. Ekkor $\varphi(g)$ rendje osztója g rendjének. Oka: φ tartja az egész kitevőjű hatványozást:

Elemi tulajdonságok

2.2.44. Feladat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Ekkor φ az egységelemet az egységelembe viszi, és inverz képe a kép inverze lesz (azaz φ az inverzképzés műveletét is tartja).

Bizonyítás

$\varphi(1_G) = \varphi(1_G * 1_G) = \varphi(1_G) \bullet \varphi(1_G)$. Innen $\varphi(1_G)$-vel egyszerűsítve (vagyis az inverzével szorozva) $1_H = \varphi(1_G)$.
Az inverzre vonatkozó állítás bizonyítása HF.

4.3.15, 4.3.16. Gyakorlat

Legyen $\varphi : G \to H$ csoporthomomorfizmus és $g \in G$.
Ekkor $\varphi(g)$ rendje osztója g rendjének.
Oka: φ tartja az egész kitevőjű hatványozást: $\varphi(g^k) = \varphi(g)^k$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ **képe** (vagyis a φ függvény értékkészlete).

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$
a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban (4.5.23. Gyakorlat),

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ **képe** (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ **részcsoport** H-ban (4.5.23. Gyakorlat),
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban (4.5.23. Gyakorlat),
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ **képe** (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ **részcsoport** H-ban (4.5.23. Gyakorlat),
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban (4.5.23. Gyakorlat), és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban (4.5.23. Gyakorlat), és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban (4.5.23. Gyakorlat), és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

(3) G csoport, $G \leq H$, $\varphi(g) = g$.

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban (4.5.23. Gyakorlat), és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

(3) G csoport, $G \leq H$, $\varphi(g) = g$. Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi) = G$,

Homomorfizmus képe

4.7.2. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in G\} \subseteq H$$

a φ képe (vagyis a φ függvény értékkészlete).
Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi)$ részcsoport H-ban (4.5.23. Gyakorlat),
és φ akkor és csak akkor szürjektív, ha $\mathrm{Im}(\varphi) = H$.

Példák

(1) $G = H = \mathbb{C}^{\times}$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a pozitív valós számok részcsoportja.

(2) $G = \mathbb{R}^{+}$, $H = \mathbb{C}^{+}$, $\varphi(r) = ri$.
Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi)$ a tisztán képzetes számok részcsoportja.

(3) G csoport, $G \leq H$, $\varphi(g) = g$. Ekkor $\mathrm{Im}(\varphi) = G$, és így minden részcsoport egy alkalmas homomorfizmus képe.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \ : \ \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \ : \ \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \ : \ \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).

Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \ : \ \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G : \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \; : \; \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \,:\, \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \ : \ \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ a speciális lineáris csoport, jele $\mathrm{SL}(n, T)$.

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \ : \ \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ a speciális lineáris csoport, jele $\mathrm{SL}(n, T)$.

(3) $G = \mathbb{R}[x]^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).

Homomorfizmus magja

4.7.4. Definíció

Ha $\varphi : G \to H$ egy csoporthomomorfizmus, akkor legyen

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in G \,:\, \varphi(a) = 1_H\} \subseteq G$$

a φ magja (itt 1_H a H csoport egységeleme).
Nyilván $\mathrm{Ker}(\varphi)$ részcsoport G-ben,
és φ akkor és csak akkor injektív, ha $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_G\}$.

Példák

(1) $G = S_n$, $H = \mathbb{Z}^\times$, $\varphi(f)$ az f előjele (azaz ± 1).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az A_n alternáló csoport.

(2) $G = \mathrm{GL}(n, T)$, $H = T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ a speciális lineáris csoport, jele $\mathrm{SL}(n, T)$.

(3) $G = \mathbb{R}[x]^+$, $H = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (φ az i behelyettesítése).
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ az $x^2 + 1$ többszöröseiből áll (HF).

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak,

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek,

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó,

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$

$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N$$
$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó, mert $(123)H \neq H(123)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff \\ \iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff \\ \iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó, mert $(123)H = \{(123), (13))\} \neq H(123)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,
mert $(123)H = \{(123), (13))\} \neq H(123) = \{(123), (23)\}$.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1} N$.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstrukció részletes motivációja a jegyzetben!

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti **faktorcsoportja**, jele G/N.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja, jele G/N.
A ψ neve természetes homomorfizmus.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín"? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké:

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín''? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín''? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín''? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín''? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín''? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín''? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk:

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1 = g_1'N$

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1 \in M_1$-et, akkor $M_1 = g_1 N$.
Vegyünk egy $g_2 \in M_2$-t, akkor $M_2 = g_2 N$.
Definiáljuk: $M_1 \cdot M_2 = g_1 g_2 N$.
Ha máshogy választunk: $M_1 = g_1' N$ és $M_2 = g_2' N$,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N)\cdot(g_2N)=g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1\in M_1$-et, akkor $M_1=g_1N$.
Vegyünk egy $g_2\in M_2$-t, akkor $M_2=g_2N$.
Definiáljuk: $M_1\cdot M_2=g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1=g_1'N$ és $M_2=g_2'N$, akkor
AZT KELL ELLENŐRIZNI, hogy $g_1g_2N=g_1'g_2'N$.

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N)\cdot(g_2N)=g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1\in M_1$-et, akkor $M_1=g_1N$.
Vegyünk egy $g_2\in M_2$-t, akkor $M_2=g_2N$.
Definiáljuk: $M_1\cdot M_2=g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1=g_1'N$ és $M_2=g_2'N$, akkor
AZT KELL ELLENŐRIZNI, hogy $g_1g_2N=g_1'g_2'N$.
Vagyis ha máshogy reprezentáljuk,

A jóldefiniáltság problémája

Értelmes-e a $(g_1N)\cdot(g_2N)=g_1g_2N$ definíció?

Mit jelent a „narancsszín”? Egy narancsnak a színe.
Mindegy melyiké: ha másik narancsot veszünk, ugyanaz a szín.

Mit jelent az „autószín”? Semmit, rosszul definiált fogalom.
Hiszen az egyik autó zöld, a másik ezüstszínű, a harmadik kék.

Mi legyen az M_1 és M_2 mellékosztályok szorzata?

Vegyünk egy $g_1\in M_1$-et, akkor $M_1=g_1N$.
Vegyünk egy $g_2\in M_2$-t, akkor $M_2=g_2N$.
Definiáljuk: $M_1\cdot M_2=g_1g_2N$.
Ha máshogy választunk: $M_1=g_1'N$ és $M_2=g_2'N$, akkor
AZT KELL ELLENŐRIZNI, hogy $g_1g_2N=g_1'g_2'N$.
Vagyis ha máshogy reprezentáljuk, ugyanaz lesz a szorzat.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N = g_1Ng_2'$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2'$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N = g_1Ng_2' = g_1'Ng_2' = g_1'g_2'N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N = g_1Ng_2' = g_1'Ng_2' = g_1'g_2'N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N = g_1Ng_2' = g_1'Ng_2' = g_1'g_2'N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.
A $\psi(g) = gN$ természetes homomorfizmus tényleg homomorfizmus,

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.
A $\psi(g) = gN$ természetes homomorfizmus tényleg homomorfizmus, melynek magja tényleg N.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletttartó

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, művelettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, művelettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, művelettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér (és a faktorgyűrű) fogalma is.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér (és a faktorgyűrű) fogalma is.
Alkalmazás: a komplex számok precíz bevezetése (később).

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.
Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$,

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.
Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, mert $\cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r) = 1$ akkor és csak akkor, ha r egész szám.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.
Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, mert $\cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) = 1$
akkor és csak akkor, ha r egész szám. Ezért a homomorfizmustétel
miatt $K = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathbb{R}^+ / \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$. $\square$

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.
Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, mert $\cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) = 1$
akkor és csak akkor, ha r egész szám. Ezért a homomorfizmustétel
miatt $K = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathbb{R}^+ / \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$. $\square$

Ennél a módszernél előre meg kell tippelni, mi a faktorcsoport.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli,

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. □

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással).

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással). Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással). Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint. $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1\}$,

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. □

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással). Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint. $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1\}$, mert ha $g * h = h$ minden h-ra, akkor $g = 1$.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. □

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással). Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint. $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1\}$, mert ha $g * h = h$ minden h-ra, akkor $g = 1$. A homomorfizmus-tétel miatt $G \cong \mathrm{Im}(\Psi) \leq S_G$. □

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, .

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, .

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST =?$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST =?$

$S = tfN$, $T = tN$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\},\ \ F = fN = \{f, f^3\},\ \ T = tN = \{t, tf^2\},\ \ S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$$S = tfN, \qquad T = tN \implies ST = tftN = ?$$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\},\quad F = fN = \{f, f^3\},\quad T = tN = \{t, tf^2\},\quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \qquad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \quad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \quad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\},\ \ F = fN = \{f, f^3\},\ \ T = tN = \{t, tf^2\},\ \ S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \quad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2, mert $F^2 = f^2N = N$,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2, mert $F^2 = f^2N = N$, de $F \neq N$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \quad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2, mert $F^2 = f^2N = N$, de $F \neq N$.

Viszont f rendje D_4-ben 4.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje
a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$,
és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak,
ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből
a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1, 15\}$ ciklikus,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1, 15\}$ ciklikus, mert $3\{1, 15\}$ rendje 4.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1,15\}$ ciklikus, mert $3\{1,15\}$ rendje 4.
$\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1,9\}$ nem ciklikus,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1, 15\}$ ciklikus, mert $3\{1, 15\}$ rendje 4.
$\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1, 9\}$ nem ciklikus, minden elemrend 1 vagy 2.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$,

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$,

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$, azaz $gN \subseteq Ng$ minden $g \in G$-re.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$, azaz $gN \subseteq Ng$ minden $g \in G$-re.
Ezt g helyett g^{-1}-re alkalmazva $g^{-1}N \subseteq Ng^{-1}$ adódik,

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$, azaz $gN \subseteq Ng$ minden $g \in G$-re.
Ezt g helyett g^{-1}-re alkalmazva $g^{-1}N \subseteq Ng^{-1}$ adódik, ahonnan g-vel jobbról és balról szorozva $Ng \subseteq gN$.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N,

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G:N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint. Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint. Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$. Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$. $\square$

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$. □

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G:N|=2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G-N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G-N\}$. $\square$

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.
Az S_3-ban $\{id, (12)\}$ három indexű,

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G:N|=2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G-N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G-N\}$. $\square$

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.
Az S_3-ban $\{id,(12)\}$ három indexű, és nem normálosztó.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$. $\square$

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.
Az S_3-ban $\{id, (12)\}$ három indexű, és nem normálosztó.
Páratlan rendű csoportban viszont minden három indexű részcsoport normálosztó (4.12.42. Feladat).

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük $(x \in G)$.
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel,

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül,

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. □

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák''.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák''. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz'', ha g-vel „átfestjük'' a síkot.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák''. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz'', ha g-vel „átfestjük'' a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel,

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák''. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz'', ha g-vel „átfestjük'' a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel, vagy először festünk g-vel, és utána alkalmazzuk f konjugáltját:

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük $(x \in G)$.
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák”. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz”, ha g-vel „átfestjük” a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel, vagy először festünk g-vel, és utána alkalmazzuk f konjugáltját: $gf(x) = (gfg^{-1})g(x)$.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük $(x \in G)$.
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. □

A konjugált elemek „egyformák". Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz", ha g-vel „átfestjük" a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel, vagy először festünk g-vel, és utána alkalmazzuk f konjugáltját: $gf(x) = (gfg^{-1})g(x)$.
A bázistranszformáció és az izomorfizmus is átfestés.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó,
ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

4.8.14. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor konjugált,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

4.8.14. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma”,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

4.8.14. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma”, azaz ugyanannyi, ugyanolyan hosszú ciklus szerepel bennük. $\square$

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12 \dots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12 \dots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1 \dots x_k)f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k)).$$

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\dots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\dots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1\dots x_k)f^{-1} = (f(x_1)\dots f(x_k)).$$

Ezért $(12\dots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik,

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1 \ldots x_k)f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big).$$

Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1\ldots x_k)f^{-1} = \big(f(x_1)\ldots f(x_k)\big).$$

Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételten konjugálva kapjuk, hogy $(34), \ldots, (n-1, n) \in H$.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1\ldots x_k)f^{-1} = \big(f(x_1)\ldots f(x_k)\big).$$

Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételten konjugálva kapjuk, hogy $(34), \ldots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1\ldots x_k)f^{-1} = \big(f(x_1)\ldots f(x_k)\big).$$

Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételten konjugálva kapjuk, hogy $(34), \ldots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció. Ha $g(n) = k$, akkor $h = (n, n-1)(n-1, n-2)\ldots(k+1, k)g$ az n-et n-be viszi.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1\ldots x_k)f^{-1} = (f(x_1)\ldots f(x_k)).$$

Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételten konjugálva kapjuk, hogy $(34), \ldots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció. Ha $g(n) = k$, akkor $h = (n, n-1)(n-1, n-2)\ldots(k+1, k)g$ az n-et n-be viszi.
Így n szerinti indukcióval érvelve $h \in H$,

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor

$$f(x_1\ldots x_k)f^{-1} = (f(x_1)\ldots f(x_k)).$$

Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételten konjugálva kapjuk, hogy $(34), \ldots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció. Ha $g(n) = k$, akkor $h = (n, n-1)(n-1, n-2)\ldots(k+1, k)g$ az n-et n-be viszi.
Így n szerinti indukcióval érvelve $h \in H$, ahonnan $g \in H$. □