Algebra3, alkalmazott matematikus

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

1/11. előadás

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  `www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil`
- `http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas`
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, kiegészítő irodalom

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, kiegészítő irodalom
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  `www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil`
- `http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas`
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, kiegészítő irodalom
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok
- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, kiegészítő irodalom
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok
- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - Ez a prezentáció definiálja a vizsgakövetelményeket.

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, kiegészítő irodalom
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok
- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - Ez a prezentáció definiálja a vizsgakövetelményeket.
  - Nyomtatható változat is letölthető.

A félév anyaga, irodalom

- Célkitűzés: Az absztrakt algebrai fogalomalkotás bemutatása.
  - Csoportelmélet: szimmetriák, leszámlálások, algoritmusok.
  - Gyűrűk és testek, algebrai kódelmélet.
- Jegyzet: Kiss Emil: Bevezetés az algebrába

  www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_kiss_emil
- http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas
  - Ez a prezentáció, és a nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok
  - A jegyzetben szereplő feladatok megoldásai
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, kiegészítő irodalom
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok
- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  - Ez a prezentáció definiálja a vizsgakövetelményeket.
  - Nyomtatható változat is letölthető.
  - Hivatkozások a tankönyvre, ahol magyarázatok is vannak.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium);
    Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium);
    Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium);
    Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri.
  - Az első rész: beugró a röpdolgozatok anyagából.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri.
  - Az első rész: beugró a röpdolgozatok anyagából.
  - A második rész rész: a megértést ellenőrző kérdések.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat (átmenési kritérium); Tematika a gyakorlatvezető döntése alapján:
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből.
  - Két évfolyamzárthelyi;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri.
  - Az első rész: beugró a röpdolgozatok anyagából.
  - A második rész rész: a megértést ellenőrző kérdések.
  - A harmadik rész: egy bizonyítás, amit kötelező tudni.

Háromszög-szimmetria

Rubin

Zafir

aluminium-oxid: Al_2O_3

Kalcit

kalcium-karbonát: $CaCO_3$

Hematit

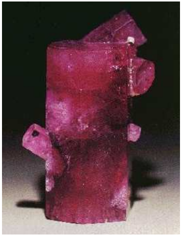
vasoxid: Fe_2O_3

Ametiszt

Kvarc

szilicium-dioxid: SiO_2

Hatszög-szimmetria



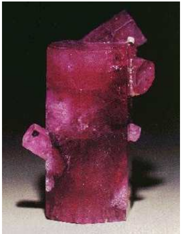
Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát):



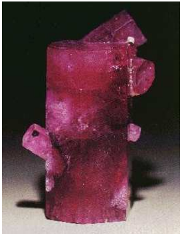
Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát): $Be_3Al_2(SiO_3)_6$



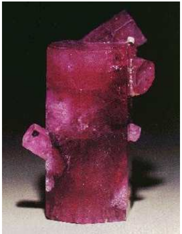
Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Hatszög-szimmetria

Berill (berillium–aluminium-szilikát): $Be_3Al_2(SiO_3)_6$
Egy szimmetriatengely körüli 60°-os elforgatás.



Vörös berill

Smaragd

Akvamarin

Kocka–oktaéder-szimmetria

Galenit
ólom-szulfid: PbS

Gyémánt
szén: C

Fluorit
kalcium-fluorid: CaF_2

Kocka–oktaéder-szimmetria

Összesen 48 szimmetria.

Galenit
ólom-szulfid: PbS

Gyémánt
szén: C

Fluorit
kalcium-fluorid: CaF_2

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája,

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg,

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei
(lendület,

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van
a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei
(lendület, energia,

A bolygómozgás szimmetriája

C.5.2. Példa: ekliptika

A bolygók keringése során a bolygó energiája, perdületének nagysága és iránya nem változik a mozgás során.
A nap középpontja, a Föld középpontja és sebességvektora egy síkot határoz meg, melyre a kiindulóállapot szimmetrikus.
Így az egész mozgás is tükörszimmetrikus,
azaz a Föld mindvégig benne marad ebben a síkban.

C.5.4. Tétel

Emmy Noether eredménye szerint összefüggés van a téridő szimmetriái és a fizika megmaradó mennyiségei (lendület, energia, perdület) között.

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe,

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési

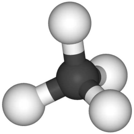
Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

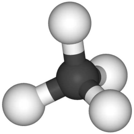
Metánmolekula: CH_4,



Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

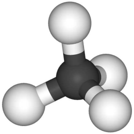
Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).



Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

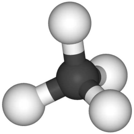


Zeeman-hatás:

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

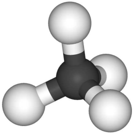


Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat
két vagy három komponensre bontja szét.

Színképvonalak felhasadása

A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

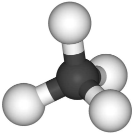


Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat
két vagy három komponensre bontja szét.
Oka: mágneses térben megszűnnek egyes szimmetriák.

Színképvonalak felhasadása

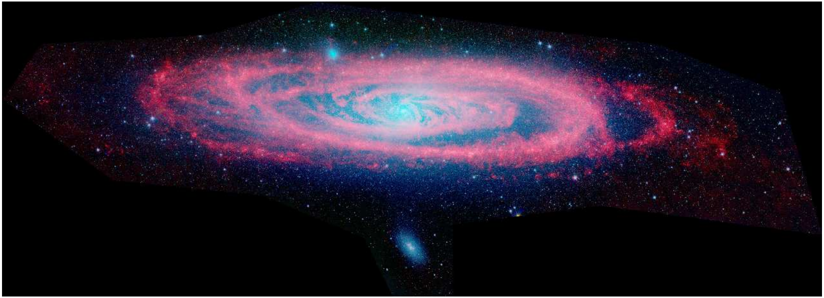
A Nap színképe, a hidrogén elnyelési és emissziós vonalai.

Metánmolekula: CH_4, 24 szimmetria (szabályos tetraéder).

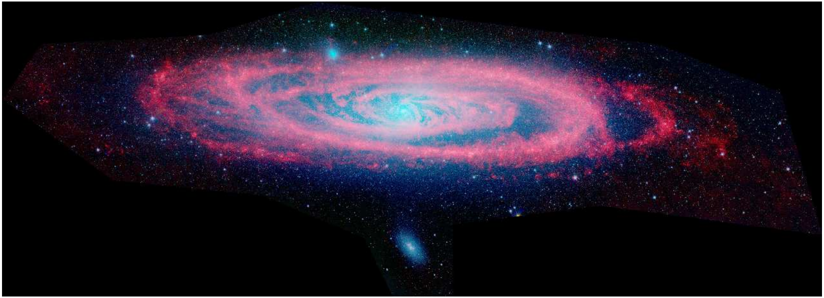


Zeeman-hatás: a mágneses tér a színképvonalakat
két vagy három komponensre bontja szét.
Oka: mágneses térben megszűnnek egyes szimmetriák.
Matematikai apparátus: a szimmetriák csoportján alapul.

Lorentz-transzformációk



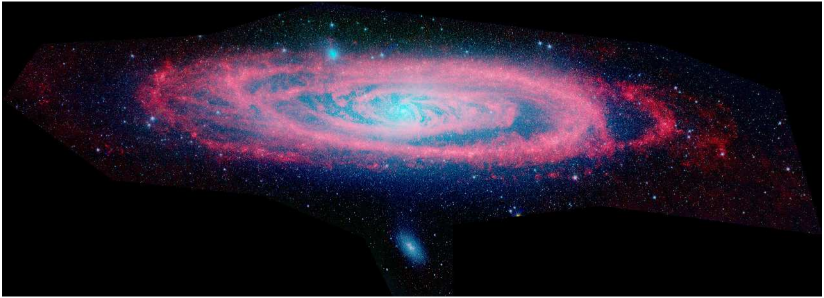
Lorentz-transzformációk



A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Lorentz-transzformációk

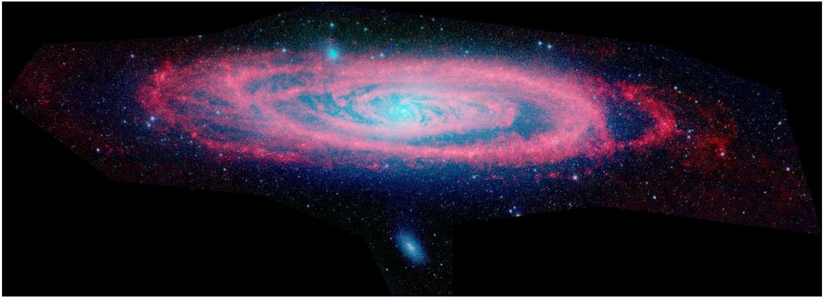
A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit a Lorentz-transzformációk adják meg.



A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Lorentz-transzformációk

A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit
a Lorentz-transzformációk adják meg.

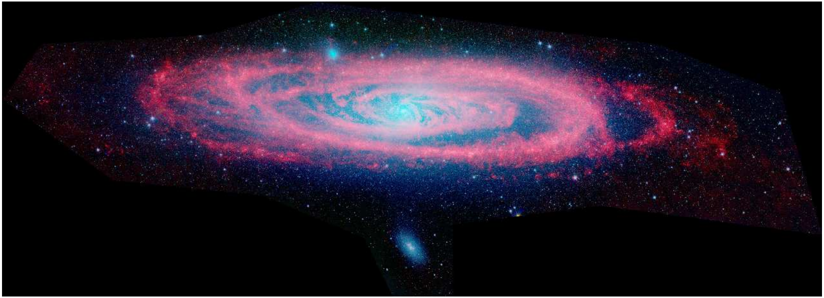


Lásd Kiss-jegyzet, 4.1. és C.6. szakasz.

A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Lorentz-transzformációk

A speciális relativitáselméletben a téridő szimmetriáit
a Lorentz-transzformációk adják meg.



Lásd Kiss-jegyzet, 4.1. és C.6. szakasz.
A C.7. szakaszban az Androméda-ködbe is elutazunk.
A fenti kép az infravörös tartományban készült.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének
sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének
sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható
(ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének
sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható
(ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének
sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható
(ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz.

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó,

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek (csak ki lehessen keverni belőlük minden sorrendet).

Kártyakeverés

„Emelés”: a csomag tetejéről az aljára teszünk egy lapot.
HF: Az emelés és a felső két lap cseréjének sokszori alkalmazásával minden sorrend megkapható (ha elég ügyesek vagyunk.)

Tétel

Ha mindkét mozdulatot $1/2$ valószínűséggel, függetlenül, nagyon sokszor, véletlenszerűen alkalmazzuk, akkor egy idő után a csomag jól megkeveredik, azaz a lapok minden sorrendjét közel egyforma valószínűséggel megkapjuk.

Sokkal általánosabban is igaz. Az $1/2$ helyett minden pozitív valószínűség jó, és a mozdulatok másmilyenek is lehetnek (csak ki lehessen keverni belőlük minden sorrendet).
Bizonyítás: ugyanaz az apparátus, mint a metánmolekulánál.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Projektív geometriában az egyenestartó transzformációk.

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes" fogalmak ezek „nyelvén" definiálhatók.

Projektív geometriában az egyenestartó transzformációk.
Ilyen például a vetítés

Csoportok a geometriában

Sokféle geometriát hasznos vizsgálni. Példák:

- euklideszi geometria,
- Bolyai-geometria,
- gömbi geometria,
- projektív geometria.

Erlangeni program (Felix Klein, 1872).
Általános vezérlő elv: milyen szimmetriák érvényesek.
A „helyes” fogalmak ezek „nyelvén” definiálhatók.

Projektív geometriában az egyenestartó transzformációk.
Ilyen például a vetítés (fényképzés, panorámaképek illesztése).

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a \ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;
- csoportkarakterek véges kommutatív csoportokra.

Számelméleti alkalmazások

Binom kongruenciák

Az $x^k \equiv a\ (p)$ kongruenciát akarjuk megoldani (p prím).
Csoportok segítségével lineáris kongruenciává alakítható.
Ezeket már meg tudjuk oldani euklideszi algoritmussal.

Dirichlet tétele

Ha $(a, b) = 1$ és $a \neq 0$, akkor van $ak + b$ alakú prím.

Bizonyítás (nagyon nehéz)

Két alapvető matematikai apparátust használ:

- Komplex függvények analízise, becslések;
- csoportkarakterek véges kommutatív csoportokra.

Szalay Mihály: Számelmélet (középiskolai tagozatos tankönyv).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak" számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).
- Képtömörítés wavelet-ek segítségével, Fast Fourier Transform.

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).
- Képtömörítés wavelet-ek segítségével, Fast Fourier Transform.

A csoportelmélet rendkívül mély!

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).
- Képtömörítés wavelet-ek segítségével, Fast Fourier Transform.

A csoportelmélet rendkívül mély! A véges egyszerű csoportok osztályozásának bizonyítása több, mint tízezer oldal!

További alkalmazások

- Logikai játékok (Rubik-kocka, 4×4-es tologatós).
- Leszámlálási problémák (amikor például vannak „azonosnak” számító megoldások: Burnside-lemma).
- Egyenletek megoldhatósága (a legalább ötödfokú polinomok gyökeit általában nem lehet a négy alapművelettel és gyökvonásokkal meghatározni).
- Csomók (kibogozásának) elmélete.
- Felületek osztályozása (homológiacsoportok).
- Differenciálegyenletek megoldhatósága (Lie-csoportok).
- Képtömörítés wavelet-ek segítségével, Fast Fourier Transform.

A csoportelmélet rendkívül mély! A véges egyszerű csoportok osztályozásának bizonyítása több, mint tízezer oldal! Alkalmazásai: kombinatorikában, algoritmuselméletben.

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali neutrális elem, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re;

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali neutrális elem, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re; (HF: csak egy neutrális elem lehet)

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali neutrális elem, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re; (HF: csak egy neutrális elem lehet)

(3) minden $g \in G$-nek van kétoldali g^{-1} inverze, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali neutrális elem, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re;
(HF: csak egy neutrális elem lehet)

(3) minden $g \in G$-nek van kétoldali g^{-1} inverze, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.
(HF: minden elemnek csak egy inverze lehet)

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali neutrális elem, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re; (HF: csak egy neutrális elem lehet)

(3) minden $g \in G$-nek van kétoldali g^{-1} inverze, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$. (HF: minden elemnek csak egy inverze lehet)

Kommutatív csoport,

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali neutrális elem, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re;
(HF: csak egy neutrális elem lehet)

(3) minden $g \in G$-nek van kétoldali g^{-1} inverze, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.
(HF: minden elemnek csak egy inverze lehet)

Kommutatív csoport, vagy Abel-csoport:

A csoport definíciója

2.2.13. Definíció

A G nem üres halmaz csoport, ha értelmezett rajta egy kétváltozós $*$ művelet úgy, hogy

(1) a $*$ művelet asszociatív, azaz minden $g, h, k \in G$ esetén $(g * h) * k = g * (h * k)$;

(2) létezik $e \in G$ kétoldali neutrális elem, melyre $e * g = g * e$ teljesül minden $g \in G$-re;
(HF: csak egy neutrális elem lehet)

(3) minden $g \in G$-nek van kétoldali g^{-1} inverze, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.
(HF: minden elemnek csak egy inverze lehet)

Kommutatív csoport, vagy Abel-csoport:

(4) a $*$ kommutatív, azaz minden $g, h \in G$ esetén $g * h = h * g$.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás,

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$,

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve összeadás.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve összeadás.
A neutrális elem neve nullelem, jele 0.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve összeadás.
A neutrális elem neve nullelem, jele 0.
Az inverz neve ellentett, jele $-g$.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve összeadás.
A neutrális elem neve nullelem, jele 0.
Az inverz neve ellentett, jele $-g$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - h = g + (-h)$.

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve összeadás.
A neutrális elem neve nullelem, jele 0.
Az inverz neve ellentett, jele $-g$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - h = g + (-h)$.

Asszociatív műveletnél egy sokténγezős szorzatot akárhogy zárójelezünk, ugyanazt kapjuk (2.2.2. Feladat).

A műveletek jelölése

Általában $*$ helyett egymás mellé írás, neve szorzás.
A neutrális elem neve egységelem, jele 1.
A g és h fölcserélhető, ha $gh = hg$.
HF: A gh inverze $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Kommutatív művelet jele gyakran $+$, neve összeadás.
A neutrális elem neve nullelem, jele 0.
Az inverz neve ellentett, jele $-g$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - h = g + (-h)$.

Asszociatív műveletnél egy soktényezős szorzatot akárhogy zárójelezünk, ugyanazt kapjuk (2.2.2. Feladat).
Ha kommutatív is, akkor a tényezők sorrendje sem számít (2.2.5. Feladat).

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű egységei).

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű egységei).

$\left(T^{n\times n}\right)^\times$ elemei a nem nulla determinánsú mátrixok.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű egységei).

$\left(T^{n\times n}\right)^\times$ elemei a nem nulla determinánsú mátrixok.
E csoport neve általános lineáris csoport,

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű egységei).

$\left(T^{n\times n}\right)^\times$ elemei a nem nulla determinánsú mátrixok.
E csoport neve általános lineáris csoport, jele $\mathrm{GL}(n, T)$.

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű egységei).

$\left(T^{n\times n}\right)^\times$ elemei a nem nulla determinánsú mátrixok.
E csoport neve általános lineáris csoport, jele $\mathrm{GL}(n, T)$.

HF: A $\mathbb{Z}_n^\times$ csoport elemei $0, 1, \ldots, n-1$ közül az n-hez relatív prím számok (2.2.3. Feladat).

Additív és multiplikatív csoport

Minden R gyűrű (és vektortér) csoport az összeadásra.
Ez az R additív csoportja, jele R^+.

Példák: $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$, T^n, $T^{n\times m}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Ha R egységelemes gyűrű, akkor az invertálható elemek csoportot alkotnak a szorzásra. Ez az R multiplikatív csoportja, jele $R^\times$.

Példák: A nem nulla komplex/valós/racionális számok.
A $\mathbb{Z}^\times$ csoport elemei 1 és -1 (a $\mathbb{Z}$ gyűrű egységei).

$\left(T^{n\times n}\right)^\times$ elemei a nem nulla determinánsú mátrixok.
E csoport neve általános lineáris csoport, jele $\mathrm{GL}(n, T)$.

HF: A $\mathbb{Z}_n^\times$ csoport elemei $0, 1, \ldots, n-1$ közül az n-hez relatív prím számok (2.2.3. Feladat).
Speciálisan $\mathbb{Z}_p^\times$ elemszáma $p-1$, ha p prím.

A kvaterniócsoport

4.5.21. Gyakorlat

Elemek: ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$.

A kvaternriócsoport

4.5.21. Gyakorlat

Elemek: ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

A kvaterniócsoport

4.5.21. Gyakorlat

Elemek: ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$,

A kvaterniócsoport

4.5.21. Gyakorlat

Elemek: ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, viszont $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.

A kvaternióccsoport

4.5.21. Gyakorlat

Elemek: ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, viszont $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.

Q	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

A kvaterniócsoport

4.5.21. Gyakorlat

Elemek: ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, viszont $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$. Az asszociativitás ellenőrzése mátrixokkal a gyűrűknél.

Q	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük,

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is!

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata,

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet,

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív.
Az identitás egységelem:

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív.
Az identitás egységelem: $id(x) = x$ minden $x \in X$-re.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív.
Az identitás egységelem: $id(x) = x$ minden $x \in X$-re.
Minden $f \in S_X$ függvénynek van kétoldali inverze:

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív.
Az identitás egységelem: $id(x) = x$ minden $x \in X$-re.
Minden $f \in S_X$ függvénynek van kétoldali inverze:
$h = f^{-1}$ azt jelenti, hogy $f(x) = y \iff h(y) = x$.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív.
Az identitás egységelem: $id(x) = x$ minden $x \in X$-re.
Minden $f \in S_X$ függvénynek van kétoldali inverze:
$h = f^{-1}$ azt jelenti, hogy $f(x) = y \iff h(y) = x$.
Ezért S_X csoport a kompozícióra.

A szimmetrikus csoport

Legyen X halmaz. Az $X \to X$ kölcsönösen egyértelmű leképezéseket X transzformációinak nevezzük, halmazuk S_X.

Figyelem: A lineáris transzformációk között megengedtünk nem bijektíveket is! A mostani terminológia más.
Ha X véges, akkor inkább permutációkról beszélünk.

Ismétlés

Ha $f, g \in S_X$, akkor legyen $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
$f \circ g$ az f és g kompozíciója vagy szorzata, jele néha fg.
Ez asszociatív művelet, de általában nem kommutatív.
Az identitás egységelem: $id(x) = x$ minden $x \in X$-re.
Minden $f \in S_X$ függvénynek van kétoldali inverze:
$h = f^{-1}$ azt jelenti, hogy $f(x) = y \iff h(y) = x$.
Ezért S_X csoport a kompozícióra. Neve: szimmetrikus csoport.

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$.

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél
$x_1 \mapsto x_2$

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél
$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3$

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k$

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$,

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \dots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad.

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus,

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k.

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Tétel (4.2.21. és 4.2.22)

Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Tétel (4.2.21. és 4.2.22)

Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

Példa: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} =$

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Tétel (4.2.21. és 4.2.22)

Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

Példa: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} = (14752)$

Ciklusfelbontás

4.2.17. Definíció

Legyen X halmaz és $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$. Ekkor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ az a permutáció, amelynél $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto \ldots \mapsto x_{k-1} \mapsto x_k \mapsto x_1$, és X többi eleme a helyén (fixen) marad. Neve: ciklus, melynek hossza k.
Diszjunkt ciklusok: nincs közös elemük.

Tétel (4.2.21. és 4.2.22)

Ha X véges halmaz, akkor minden S_X-beli permutáció a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható páronként diszjunkt ciklusok szorzataként.

Példa: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} = (14752)(39).$

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció,

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció.

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan,

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.

Bizonyítás

HF: $(x_1 \dots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \dots (x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.

Bizonyítás

HF: $(x_1 \dots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3)\dots(x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.
Azaz egy k hosszú ciklus $k-1$ darab transzpozíció szorzata.

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.

Bizonyítás

HF: $(x_1 \ldots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3)\ldots(x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.
Azaz egy k hosszú ciklus $k-1$ darab transzpozíció szorzata.
Használjuk föl, hogy $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. □

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.

Bizonyítás

HF: $(x_1 \dots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \dots (x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.
Azaz egy k hosszú ciklus $k-1$ darab transzpozíció szorzata.
Használjuk föl, hogy $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. □

4.8.14. Gyakorlat, HF

Ha $f \in S_n$, akkor $f(x_1 \dots x_k)f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k))$,

Az előjel kiszámítása

4.2.24. Következmény

Páros hosszú ciklus páratlan permutáció, páratlan hosszú ciklus páros permutáció. Egy permutáció pontosan akkor páratlan, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páratlan.

Bizonyítás

HF: $(x_1 \dots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \dots (x_{k-2} x_{k-1})(x_{k-1} x_k)$.
Azaz egy k hosszú ciklus $k-1$ darab transzpozíció szorzata.
Használjuk föl, hogy $\mathrm{sg}(fg) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}(g)$. □

4.8.14. Gyakorlat, HF

Ha $f \in S_n$, akkor $f(x_1 \dots x_k)f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k))$, így ha $g \in S_n$, akkor g és fgf^{-1} ugyanannyi, ugyanolyan hosszú ciklusból áll.

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120,

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240,

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.
Ez utóbbi (az identitás)

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.
Ez utóbbi (az identitás) minden háromszögnek megvan.

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.
Ez utóbbi (az identitás) minden háromszögnek megvan.

Definíció

A háromszög szimmetriája a sík egy olyan egybevágósági transzformációja,

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.
Ez utóbbi (az identitás) minden háromszögnek megvan.

Definíció

A háromszög szimmetriája a sík egy olyan egybevágósági transzformációja, ami a háromszöget önmagába képzi.

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.
Ez utóbbi (az identitás) minden háromszögnek megvan.

Definíció

A háromszög szimmetriája a sík egy olyan egybevágósági transzformációja, ami a háromszöget önmagába képzi.
Ilyenek kompozíciója és inverze is ilyen.

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.
Ez utóbbi (az identitás) minden háromszögnek megvan.

Definíció

A háromszög szimmetriája a sík egy olyan egybevágósági transzformációja, ami a háromszöget önmagába képzi.
Ilyenek kompozíciója és inverze is ilyen.
Ezért a szimmetriák csoportot alkotnak.

A háromszögek szimmetriái

Mik az ABC háromszög szimmetriái?

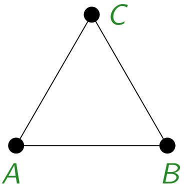
Ha egyenlő szárú, akkor tükrözés az alap felező merőlegesére.
Ha szabályos, akkor a három tükrözés mellett három forgatás:
a háromszög középpontja körül 120, 240, 0 fokkal.
Ez utóbbi (az identitás) minden háromszögnek megvan.

Definíció

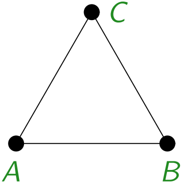
A háromszög szimmetriája a sík egy olyan egybevágósági transzformációja, ami a háromszöget önmagába képzi.
Ilyenek kompozíciója és inverze is ilyen.
Ezért a szimmetriák csoportot alkotnak.

HF: A szabályos háromszögnek csak e hat szimmetriája van.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja

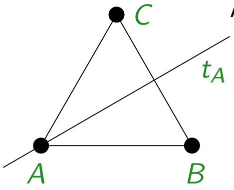


A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



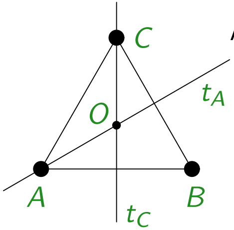
A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



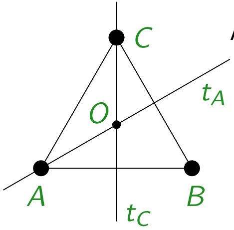
A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

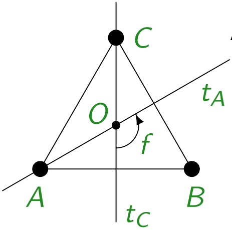
A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.

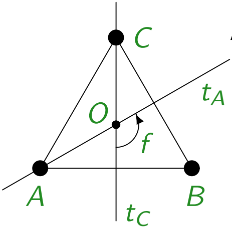
A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.

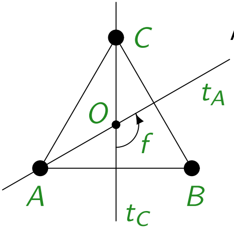
A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



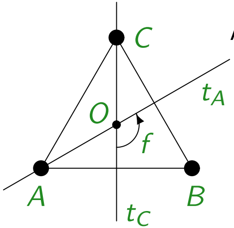
A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

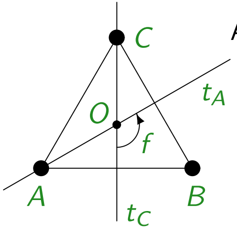
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

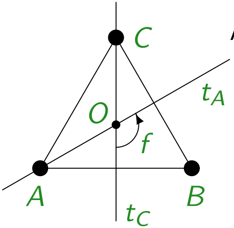
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?\quad A \mapsto A$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

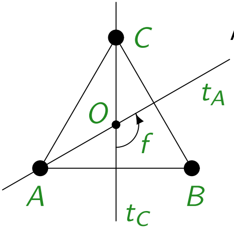
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ? \quad A \mapsto A \mapsto B;$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

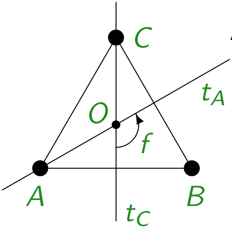
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?\quad A \mapsto A \mapsto B; \quad B \mapsto C$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

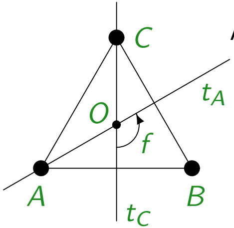
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?$ $\quad A \mapsto A \mapsto B;$ $\quad B \mapsto C \mapsto A;$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

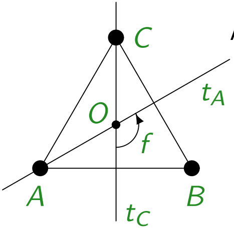
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?\quad A \mapsto A \mapsto B; \quad B \mapsto C \mapsto A; \quad C \mapsto B$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

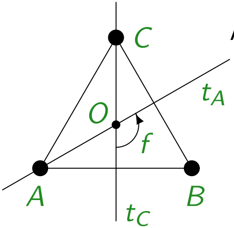
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ? \quad A \mapsto A \mapsto B; \quad B \mapsto C \mapsto A; \quad C \mapsto B \mapsto C.$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

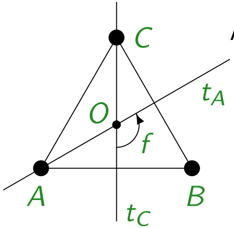
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?$ $\quad A \mapsto A \mapsto B; \quad B \mapsto C \mapsto A; \quad C \mapsto B \mapsto C.$ Azaz t_C.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

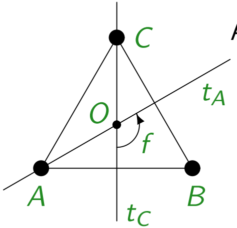
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?$ $\quad A \mapsto A \mapsto B;$ $\quad B \mapsto C \mapsto A;$ $\quad C \mapsto B \mapsto C$. Azaz t_C.
$t_C t_A = ?$

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

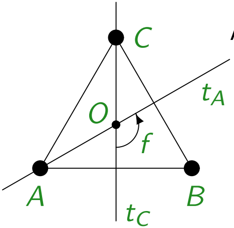
Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?$ $\quad A \mapsto A \mapsto B$; $\quad B \mapsto C \mapsto A$; $\quad C \mapsto B \mapsto C$. Azaz t_C.
$t_C t_A = ?$ Forgatás a tengelyek szögének kétszeresével.

A szabályos háromszög szimmetriacsoportja



A t_A a BC felező merőlegesére tükrözés.

Az f az O körüli $+120$ fokos forgatás.
Az $f^2 = f \circ f$ a $+240$ fokos forgatás.
Az Algebra1-ben használt jelöléssel:

$$id = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad f^2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

$$t_A = \begin{bmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad t_B = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad t_C = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$ft_A = ?$ $A \mapsto A \mapsto B$; $B \mapsto C \mapsto A$; $C \mapsto B \mapsto C$. Azaz t_C.
$t_C t_A = ?$ Forgatás a tengelyek szögének kétszeresével. Azaz f.

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$,

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$,

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$,

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni:

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id$,

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id$, $\quad t^2 = id$,

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id$, $\quad t^2 = id$, $\quad tft = f^{-1}(= f^2)$.

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id, \quad t^2 = id, \quad tft = f^{-1} (= f^2)$.
Példa: $t_B t_C =$

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id, \quad t^2 = id, \quad tft = f^{-1} (= f^2)$.
Példa: $t_B t_C = (tf)(tf^2) =$

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id$, $\quad t^2 = id$, $\quad tft = f^{-1}(= f^2)$.
Példa: $t_B t_C = (tf)(tf^2) = (tft)f^2 =$

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id$, $\quad t^2 = id$, $\quad tft = f^{-1} (= f^2)$.
Példa: $t_B t_C = (tf)(tf^2) = (tft)f^2 = f^{-1}f^2 =$

Cayley-táblázat

A csoport szorzástáblája (Cayley-táblázat):
A g sorának és h oszlopának metszéspontjában gh.

D_3	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
id	id	f	f^2	t_A	t_B	t_C
f	f	f^2	id	t_C	t_A	t_B
f^2	f^2	id	f	t_B	t_C	t_A
t_A	t_A	t_B	t_C	id	f	f^2
t_B	t_B	t_C	t_A	f^2	id	f
t_C	t_C	t_A	t_B	f	f^2	id

D_3 elemei $\{id, f, f^2, t, tf, tf^2\}$, ahol $t = t_A$, $tf = t_B$, $tf^2 = t_C$.
Elég ennyit tudni: $f^3 = id$, $\quad t^2 = id$, $\quad tft = f^{-1} (= f^2)$.
Példa: $t_B t_C = (tf)(tf^2) = (tft)f^2 = f^{-1}f^2 = f$.

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1},$

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1},$
(az első n transzformáció forgatás,

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás,

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \dots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \dots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1$,

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1, \quad t^2 = 1,$

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \dots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \dots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1, \quad t^2 = 1, \quad tf^i t = f^{-i}$ összefüggések.

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1, \quad t^2 = 1, \quad tf^i t = f^{-i}$ összefüggések.
Ezekből minden szorzat kiszámítható:

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1, \quad t^2 = 1, \quad tf^i t = f^{-i}$ összefüggések.
Ezekből minden szorzat kiszámítható:

$$f^i f^j = f^{i+j}, \qquad (tf^i)f^j = tf^{i+j},$$
$$f^i(tf^j) = tf^{j-i}, \qquad (tf^i)(tf^j) = f^{j-i},$$

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1, \quad t^2 = 1, \quad tf^i t = f^{-i}$ összefüggések.
Ezekből minden szorzat kiszámítható:

$$f^i f^j = f^{i+j}, \qquad (tf^i)f^j = tf^{i+j},$$
$$f^i(tf^j) = tf^{j-i}, \qquad (tf^i)(tf^j) = f^{j-i},$$

ahol az f kitevőjében a $+$ és a $-$ jelek a mod n műveleteket jelentik.

A diédercsoport

A szabályos n-szög szimmetriacsoportja a D_n diédercsoport.

Tétel (4.1.23. Állítás)

Legyen f a középpont körüli $2\pi/n$ szögű forgatás,
t pedig a sokszög tetszőleges tengelyes szimmetriája.
Ekkor $D_n = \{f^0 = id = 1, f, f^2, \ldots, f^{n-1}, t, tf, tf^2, \ldots, tf^{n-1}\}$
(az első n transzformáció forgatás, a többi tengelyes tükrözés).
A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van.

Érvényesek az $f^n = 1$, $t^2 = 1$, $tf^i t = f^{-i}$ összefüggések.
Ezekből minden szorzat kiszámítható:

$$f^i f^j = f^{i+j}, \qquad (tf^i)f^j = tf^{i+j},$$

$$f^i(tf^j) = tf^{j-i}, \qquad (tf^i)(tf^j) = f^{j-i},$$

ahol az f kitevőjében a $+$ és a $-$ jelek a mod n műveleteket jelentik. A tf^i elemek mindegyikének önmaga az inverze. $\square$

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások,

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod 360° értendő).

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod $360°$ értendő).
Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $t f_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$.

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod $360°$ értendő).
Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $t f_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$.
A $t f_\alpha$

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod 360° értendő).
Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $tf_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$.
A tf_α és $f_\alpha t$ is tükrözés,

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod $360°$ értendő).
Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $tf_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$.
A tf_α és $f_\alpha t$ is tükrözés, két tükrözés szorzata pedig forgatás. □

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod $360°$ értendő).
Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $tf_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$.
A tf_α és $f_\alpha t$ is tükrözés, két tükrözés szorzata pedig forgatás. □

A gömb szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(3)$.

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod 360° értendő).
Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $tf_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$.
A tf_α és $f_\alpha t$ is tükrözés, két tükrözés szorzata pedig forgatás. □

A gömb szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(3)$.

Tétel (4.1.29. Feladat)

Az $\mathrm{O}(3)$ irányítástartó elemei a középponton átmenő egyenesek körüli forgatások.

A kör és a gömb szimmetriacsoportja

A kör szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(2)$.

Állítás (lásd 4.1. szakasz)

Az $\mathrm{O}(2)$ elemei a középpont körüli α szögű f_α forgatások, továbbá az átmérőkre való tengelyes tükrözések.
Nyilván $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ (az összeadás mod $360°$ értendő).
Ha $t \in \mathrm{O}(2)$ tükrözés, akkor $tf_\alpha t = f_{-\alpha} = f_\alpha^{-1}$.
A tf_α és $f_\alpha t$ is tükrözés, két tükrözés szorzata pedig forgatás. □

A gömb szimmetriacsoportjának jele $\mathrm{O}(3)$.

Tétel (4.1.29. Feladat)

Az $\mathrm{O}(3)$ irányítástartó elemei a középponton átmenő egyenesek körüli forgatások. A gömb többi szimmetriája egy ilyen forgatásnak és az xy síkra való tükrözésnek a szorzata.

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

A sík „szimmetriái"

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás:

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások:

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások:

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések:

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) Csúsztatva tükrözések

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) Csúsztatva tükrözések (egy tengelyre tükrözünk, utána a tengellyel párhuzamosan eltolunk):

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) Csúsztatva tükrözések (egy tengelyre tükrözünk, utána a tengellyel párhuzamosan eltolunk): nincs fixpontjuk.

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) Csúsztatva tükrözések (egy tengelyre tükrözünk, utána a tengellyel párhuzamosan eltolunk): nincs fixpontjuk.

Az eltolások és a forgatások mozgások (irányítástartók),

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) Csúsztatva tükrözések (egy tengelyre tükrözünk, utána a tengellyel párhuzamosan eltolunk): nincs fixpontjuk.

Az eltolások és a forgatások mozgások (irányítástartók), a tükrözések és a csúsztatva tükrözések nem.

A sík „szimmetriái”

$\mathrm{E}(2)$, illetve $\mathrm{E}(3)$ jelöli a sík, illetve a tér egybevágósági (távolságtartó) transzformációinak csoportját a kompozícióra.

4.1.13. Állítás

A sík egybevágósági transzformációi a következők.

(1) Az identitás: minden pont fixpont ($id(P) = P$).

(2) A nem identikus eltolások: nincs fixpontjuk.

(3) A nem identikus forgatások: csak a forgáscentrum fixpont.

(4) Tengelyes tükrözések: a fixpontok halmaza a tengely.

(5) Csúsztatva tükrözések (egy tengelyre tükrözünk, utána a tengellyel párhuzamosan eltolunk): nincs fixpontjuk.

Az eltolások és a forgatások mozgások (irányítástartók), a tükrözések és a csúsztatva tükrözések nem. Minden egybevágóság előáll legfeljebb három tükrözés szorzataként.

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$?

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$,

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne,

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás.

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^+$	0	1
0	0	1
1	1	0

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^+$	0	1
0	0	1
1	1	0

E csoportok teljesen EGYFORMA SZERKEZETŰEK!

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^{\times}$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

E csoportok teljesen EGYFORMA SZERKEZETŰEK!
Képlettel: $\psi : 1 \mapsto id, \ -1 \mapsto (12)$

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^+$	0	1
0	0	1
1	1	0

E csoportok teljesen EGYFORMA SZERKEZETŰEK!
Képlettel: $\psi : 1 \mapsto id,\ -1 \mapsto (12)$ bijektív

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^+$	0	1
0	0	1
1	1	0

E csoportok teljesen EGYFORMA SZERKEZETŰEK!
Képlettel: $\psi : 1 \mapsto id,\ -1 \mapsto (12)$ bijektív és művelettartó:

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^+$	0	1
0	0	1
1	1	0

E csoportok teljesen EGYFORMA SZERKEZETŰEK!
Képlettel: $\psi : 1 \mapsto id,\ -1 \mapsto (12)$ bijektív és művelettartó:
$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$.

A kételemű csoportok szerkezete

Legyen $G = \{1, b\}$ kételemű csoport, 1 az egységelem.
Ekkor $1 * 1 = 1$ és $1 * b = b = b * 1$.
Mennyi lesz $b * b$? Csak 1 vagy b lehet.
Ha $b * b = b = b * 1$, akkor az egyszerűsítési szabály miatt $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát $b * b = 1$.
Vagyis az összes szorzatot ismerjük!

G	1	b
1	1	b
b	b	1

$\mathbb{Z}^\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

S_2	id	(12)
id	id	(12)
(12)	(12)	id

$\mathbb{Z}_2^+$	0	1
0	0	1
1	1	0

E csoportok teljesen EGYFORMA SZERKEZETŰEK!
Képlettel: $\psi : 1 \mapsto id,\ -1 \mapsto (12)$ bijektív és művelettartó:
$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$. Például $\psi((-1)(-1)) = id = \psi(-1)\psi(-1)$.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre,

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletartó:

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus,

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés **csoporthomomorfizmus**,
ha **művelettartó**: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ **izomorfizmus**. A G és a H **izomorf csoportok**,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra,

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra,
H a pozitív valós számok a szorzásra,

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra,
H a pozitív valós számok a szorzásra, $\psi(g) = 10^g$.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha műveletttartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra,
H a pozitív valós számok a szorzásra, $\psi(g) = 10^g$.

(2) G a sík P pontja körüli forgatások a kompozícióra,

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra,
H a pozitív valós számok a szorzásra, $\psi(g) = 10^g$.

(2) G a sík P pontja körüli forgatások a kompozícióra,
H a sík Q pontja körüli forgatások a kompozícióra,

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra,
H a pozitív valós számok a szorzásra, $\psi(g) = 10^g$.

(2) G a sík P pontja körüli forgatások a kompozícióra,
H a sík Q pontja körüli forgatások a kompozícióra,
f eltolás $\overrightarrow{PQ}$-val.

Példák izomorfizmusra

4.3.1. Definíció

Legyen G csoport a $*$ műveletre, és H csoport a $\bullet$ műveletre.
A $\psi : G \to H$ leképezés csoporthomomorfizmus,
ha művelettartó: $\psi(a * b) = \psi(a) \bullet \psi(b)$ minden $a, b \in G$-re.
Ha ψ kölcsönösen egyértelmű is a G és H halmazok között,
akkor ψ izomorfizmus. A G és a H izomorf csoportok,
ha van közöttük izomorfizmus, jele $G \cong H$.

4.3.3. Példa

(1) G a valós számok az összeadásra,
H a pozitív valós számok a szorzásra, $\psi(g) = 10^g$.

(2) G a sík P pontja körüli forgatások a kompozícióra,
H a sík Q pontja körüli forgatások a kompozícióra,
$\psi(g) = fgf^{-1}$, ahol f eltolás $\overrightarrow{PQ}$-val.

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$,

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$,

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$,

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletttartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$,

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$,
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$, így $\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$.
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$, így $\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$.
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

$\mathbb{Z}_5^\times$ és $\mathbb{Z}_8^\times$ nem izomorfak,

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletttartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$, így $\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$.
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

$\mathbb{Z}_5^\times$ és $\mathbb{Z}_8^\times$ nem izomorfak, mert utóbbinál $g * g = 1$ minden g-re,

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletettartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$, így $\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$.
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

$\mathbb{Z}_5^\times$ és $\mathbb{Z}_8^\times$ nem izomorfak, mert utóbbinál $g * g = 1$ minden g-re, a másikban pedig nem

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$, így $\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$.
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

$\mathbb{Z}_5^\times$ és $\mathbb{Z}_8^\times$ nem izomorfak, mert utóbbinál $g * g = 1$ minden g-re, a másikban pedig nem (a két táblázat főátlójában látszik).

Példák négyelemű csoportra

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_8^\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Mely csoportok izomorfak ezek közül?

$\psi : \mathbb{Z}_4^+ \to \mathbb{Z}_5^\times$, $\psi(g) = 2^g$ (azaz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 3$).
Ez műveletlettartó: $2^{x+y} = 2^x 2^y$, így $\mathbb{Z}_4^+ \cong \mathbb{Z}_5^\times$.
(Pontosabban azt kell ellenőrizni, hogy $2^{x+_4 y} = 2^x *_5 2^y$).

$\mathbb{Z}_5^\times$ és $\mathbb{Z}_8^\times$ nem izomorfak, mert utóbbinál $g * g = 1$ minden g-re, a másikban pedig nem (a két táblázat főátlójában látszik).

HF: izomorfizmusnál egységelem képe egységelem.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$.
Ha a-nak van egy b ellentettje, akkor legyen $(-n)a = nb$.

Hatványozás csoportban (ismétlés)

2.2.19. Definíció

Legyen $*$ asszociatív művelet és n pozitív egész.
Ekkor a^n jelentse az n tényezős $a * a * \ldots * a$ szorzatot.
Ez az a elem n-edik hatványa.
Ha a művelet jele $+$, akkor a^n helyett na-t írunk.
Ez az a elem n-szerese (többszörös).

Ha a $*$ szorzásra van 1 egységelem, akkor legyen $a^0 = 1$.
Ha a $+$ összeadásra van nullelem, akkor legyen $0a = 0$.

Ha a-nak van egy b inverze, akkor legyen $a^{-n} = b^n$.
Ha a-nak van egy b ellentettje, akkor legyen $(-n)a = nb$.

Értelmeztük az egész kitevőjű hatvány (többszörös) fogalmát.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban,

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás,

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok.
Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok.
Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok.
Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok.
Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$),

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok.
Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$), akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok. Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők ($ab = ba$), akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

Bizonyítás

Pozitív kitevőkre egyszerű leszámlálás.

A hatványozás tulajdonságai

2.2.20. Állítás

Legyenek a és b elemek egy G csoportban, ahol
a művelet jele egymás mellé írás, és m, n egész számok.
Ekkor a következők teljesülnek.

(1) a^{-n} az a^n inverze.

(2) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(4) Ha a és b felcserélhetők $(ab = ba)$, akkor $(ab)^n = a^n b^n$.

Bizonyítás

Pozitív kitevőkre egyszerű leszámlálás.
A többi esetben esetszétválasztás (HF).

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma.

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma.
Jele: $o(z)$.

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen),

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám **rendje** a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n **jó kitevője** z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(z) \neq \infty$ esetén

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(z) \neq \infty$ esetén $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$,

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(z) \neq \infty$ esetén $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$, speciálisan $z^k = 1 \iff o(z) \mid k$.

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám **rendje** a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n **jó kitevője** z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(z) \neq \infty$ esetén $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$, speciálisan $z^k = 1 \iff o(z) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám **rendje** a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n **jó kitevője** z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(z) \neq \infty$ esetén $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$, speciálisan $z^k = 1 \iff o(z) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

(4) A hatvány rendjének képlete: $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

Ismétlés

1.5. szakasz

Egy z komplex szám rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(z)$. Az n jó kitevője z-nek, ha $z^n = 1$.

(1) A z-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű számra).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(z) \neq \infty$ esetén $z^k = z^\ell \iff o(z) \mid k - \ell$, speciálisan $z^k = 1 \iff o(z) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

(4) A hatvány rendjének képlete: $o(z^k) = \dfrac{o(z)}{(o(z), k)}$.

(5) A $z = 1$ az egyetlen olyan szám, melynek a rendje 1.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma.
Jele: $o(g)$.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma.
Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen),

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma.
Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma.
Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(g) \neq \infty$ esetén

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(g) \neq \infty$ esetén $g^k = g^\ell \iff o(g) \mid k - \ell$,

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(g) \neq \infty$ esetén $g^k = g^\ell \iff o(g) \mid k - \ell$, speciálisan $g^k = 1 \iff o(g) \mid k$.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(g) \neq \infty$ esetén $g^k = g^\ell \iff o(g) \mid k - \ell$, speciálisan $g^k = 1 \iff o(g) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma. Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(g) \neq \infty$ esetén $g^k = g^\ell \iff o(g) \mid k - \ell$, speciálisan $g^k = 1 \iff o(g) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

(4) A hatvány rendjének képlete: $o(g^k) = \dfrac{o(g)}{(o(g), k)}$.

Csoportelem rendje

4.3.9. Definíció, 4.3.10. Gyakorlat

Egy g csoportelem rendje a különböző hatványainak száma.
Jele: $o(g)$. Az n jó kitevője g-nek, ha $g^n = 1$.

(1) A g-nek vagy bármely két egész kitevőjű hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek.

(2) A rend a legkisebb pozitív jó kitevő (véges rendű elemre).

(3) Tetszőleges k és ℓ egészekre, $o(g) \neq \infty$ esetén $g^k = g^\ell \iff o(g) \mid k - \ell$, speciálisan $g^k = 1 \iff o(g) \mid k$. A jó kitevők tehát pontosan a rend többszörösei.

(4) A hatvány rendjének képlete: $o(g^k) = \dfrac{o(g)}{(o(g), k)}$.

(5) A $g = 1$ az egyetlen olyan elem, melynek a rendje 1. $\square$

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $\quad 2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, $\quad$ de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $\quad 2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, $\quad$ de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $\quad 2^2 = 4 \neq 1$,
$2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, $\quad$ de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2,
mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$.

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n, k)$

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást).

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást). $k360^\circ$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális.

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást). $k360^\circ$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális. Ha $k = p/q$ egyszerűsíthetetlen tört, akkor a rend q.

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást). $k360°$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális. Ha $k = p/q$ egyszerűsíthetetlen tört, akkor a rend q.

HF (4.3.16): Ha $\psi : G \to H$ izomorfizmus, akkor megőrzi az elemrendet,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást). $k360°$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális. Ha $k = p/q$ egyszerűsíthetetlen tört, akkor a rend q.

HF (4.3.16): Ha $\psi : G \to H$ izomorfizmus, akkor megőrzi az elemrendet, azaz minden $g \in G$-re g és $\psi(g)$ rendje ugyanaz.

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást). $k360°$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális. Ha $k = p/q$ egyszerűsíthetetlen tört, akkor a rend q.

HF (4.3.16): Ha $\psi : G \to H$ izomorfizmus, akkor megőrzi az elemrendet, azaz minden $g \in G$-re g és $\psi(g)$ rendje ugyanaz. Ezért $\mathbb{Z}_5^\times$ nem izomorf $\mathbb{Z}_8^\times$-cal,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást). $k360°$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális. Ha $k = p/q$ egyszerűsíthetetlen tört, akkor a rend q.

HF (4.3.16): Ha $\psi : G \to H$ izomorfizmus, akkor megőrzi az elemrendet, azaz minden $g \in G$-re g és $\psi(g)$ rendje ugyanaz. Ezért $\mathbb{Z}_5^\times$ nem izomorf $\mathbb{Z}_8^\times$-cal, mert $\mathbb{Z}_5^\times$-ben csak egy másodrendű elem van,

Példák elemrendre

(1) $G = \mathbb{Z}_5^\times$. Ekkor $o(2) = 4$, mert $2^1 = 2 \neq 1$, $2^2 = 4 \neq 1$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 3 \neq 1$, de $2^4 = 3 \cdot 2 = 1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_8^\times$. Az 1-től különböző elemek rendje 2, mert $3^2 = 5^2 = 7^2 = 1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_6^+$. Ekkor $o(4) = 3$, mert $2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, de $3 \cdot 4 = 0$. Általában $\mathbb{Z}_n^+$-ban $o(k) = n/(n,k)$ (alkalmazzuk a hatvány rendjének képletét a $g = 1$ elemre).

(4) Tükrözés rendje 2, eltolás rendje ∞ (kivéve az identitást). $k360^\circ$-os forgatás rendje akkor véges, ha k racionális. Ha $k = p/q$ egyszerűsíthetetlen tört, akkor a rend q.

HF (4.3.16): Ha $\psi : G \to H$ izomorfizmus, akkor megőrzi az elemrendet, azaz minden $g \in G$-re g és $\psi(g)$ rendje ugyanaz. Ezért $\mathbb{Z}_5^\times$ nem izomorf $\mathbb{Z}_8^\times$-cal, mert $\mathbb{Z}_5^\times$-ben csak egy másodrendű elem van, $\mathbb{Z}_8^\times$-ben pedig három.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi,

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$.
De $f^k = id$, mert a ciklus minden eleme egyszer „körbemegy”.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \dots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$.
De $f^k = id$, mert a ciklus minden eleme egyszer „körbemegy".
Legyen $g = g_1 \dots g_m$, ahol $g_1, \dots, g_m$ diszjunkt ciklusok.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$.
De $f^k = id$, mert a ciklus minden eleme egyszer „körbemegy”.
Legyen $g = g_1 \ldots g_m$, ahol $g_1, \ldots, g_m$ diszjunkt ciklusok.
Ekkor $g^\ell = id \iff g_j^\ell = id$ minden j-re,

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \dots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$.
De $f^k = id$, mert a ciklus minden eleme egyszer „körbemegy”.
Legyen $g = g_1 \dots g_m$, ahol $g_1, \dots, g_m$ diszjunkt ciklusok.
Ekkor $g^\ell = id \iff g_j^\ell = id$ minden j-re,
mert ezek a ciklusok diszjunkt halmazokat mozgatnak.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$.
De $f^k = id$, mert a ciklus minden eleme egyszer „körbemegy".
Legyen $g = g_1 \ldots g_m$, ahol $g_1, \ldots, g_m$ diszjunkt ciklusok.
Ekkor $g^\ell = id \iff g_j^\ell = id$ minden j-re,
mert ezek a ciklusok diszjunkt halmazokat mozgatnak.
De $g_j^\ell = id \iff g_j$ rendje (vagyis a hossza) osztója ℓ-nek.

Permutáció rendjének leolvasása

4.3.12. Állítás

Az $f = (x_1, \ldots, x_k)$ ciklus rendje k, vagyis a hossza. Permutáció rendje a diszjunkt ciklushosszak legkisebb közös többszöröse.

Példa: $(23)(15)(45)(42)(13) = (12)(354)$ rendje $[2, 3] = 6$.
FONTOS: a ciklusok diszjunktak kell, hogy legyenek!

Bizonyítás

Ha $\ell < k$, akkor f^ℓ az x_1-et $x_{\ell+1} \neq x_1$-be viszi, így $f^\ell \neq id$.
De $f^k = id$, mert a ciklus minden eleme egyszer „körbemegy”.
Legyen $g = g_1 \ldots g_m$, ahol $g_1, \ldots, g_m$ diszjunkt ciklusok.
Ekkor $g^\ell = id \iff g_j^\ell = id$ minden j-re,
mert ezek a ciklusok diszjunkt halmazokat mozgatnak.
De $g_j^\ell = id \iff g_j$ rendje (vagyis a hossza) osztója ℓ-nek.
Tehát g jó kitevői a g_j ciklusok hosszainak közös többszörösei. $\square$

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus,

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3,

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus,

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus,

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 generálja

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus,

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus, például az 1 generálja.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus, például az 1 generálja.

4.3.20. Tétel

G ciklikus $\iff$

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus, például az 1 generálja.

4.3.20. Tétel

G ciklikus $\iff G \cong \mathbb{Z}^+$

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus, például az 1 generálja.

4.3.20. Tétel

G ciklikus $\iff$ $G \cong \mathbb{Z}^+$ vagy $G \cong \mathbb{Z}_n^+$.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus, például az 1 generálja.

4.3.20. Tétel

G ciklikus $\iff$ $G \cong \mathbb{Z}^+$ vagy $G \cong \mathbb{Z}_n^+$.

Valóban: ha G ciklikus és g generálja, akkor legyen $n = o(g)$.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus, például az 1 generálja.

4.3.20. Tétel

G ciklikus $\iff$ $G \cong \mathbb{Z}^+$ vagy $G \cong \mathbb{Z}_n^+$.

Valóban: ha G ciklikus és g generálja, akkor legyen $n = o(g)$.
Ha $n < \infty$, akkor $\psi : \mathbb{Z}_n^+ \to G$, $\psi(k) = g^k$ izomorfizmus.

Ciklikus csoportok

4.3.17. Definíció

A G csoport ciklikus, ha egy eleme hatványaiból áll.
Az ilyen elem neve G egy generátora.

$\mathbb{Z}_5^\times$ ciklikus, generátorai 2 és 3, vagyis a negyedrendű elemek.
$\mathbb{Z}_8^\times$ nem ciklikus, mert minden eleme legfeljebb másodrendű.
$\mathbb{Z}^+$ ciklikus, az 1 és a -1 generálja (egész többszörösök!).
$\mathbb{Z}_n^+$ ciklikus, például az 1 generálja.

4.3.20. Tétel

G ciklikus $\iff$ $G \cong \mathbb{Z}^+$ vagy $G \cong \mathbb{Z}_n^+$.

Valóban: ha G ciklikus és g generálja, akkor legyen $n = o(g)$.
Ha $n < \infty$, akkor $\psi : \mathbb{Z}_n^+ \to G$, $\psi(k) = g^k$ izomorfizmus.
Ha $n = \infty$, akkor $\psi : \mathbb{Z}^+ \to G$, $\psi(k) = g^k$ izomorfizmus. $\square$

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$,

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n, k)$

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n, k)$ a hatvány rendjének képlete miatt.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n,k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n,k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt. De g^d akkor generátor, ha rendje n,

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n,k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt. De g^d akkor generátor, ha rendje n, azaz ha $(n,k) = 1$.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n,k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt. De g^d akkor generátor, ha rendje n, azaz ha $(n,k) = 1$. Az ilyenek száma $\varphi(n)$.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n,k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt. De g^d akkor generátor, ha rendje n, azaz ha $(n,k) = 1$. Az ilyenek száma $\varphi(n)$.
A harmadik állítás következik egy későbbi tételből.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n,k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt. De g^d akkor generátor, ha rendje n, azaz ha $(n,k) = 1$. Az ilyenek száma $\varphi(n)$.
A harmadik állítás következik egy későbbi tételből.

4.3.22. Tétel (nehéz)

Véges test multiplikatív csoportja ciklikus.

Elemrend és generátorok ciklikus csoportban

4.3.24. Állítás

Egy n elemű ciklikus csoportban $\varphi(n)$ generátorelem van.
Minden csoportelem rendje osztója n-nek.
Minden $d \mid n$-re $\varphi(d)$ darab d rendű elem van.

Bizonyítás

Ha g egy generátor, akkor $o(g) = n$, így $o(g^k) = n/(n, k) \mid n$ a hatvány rendjének képlete miatt. De g^d akkor generátor, ha rendje n, azaz ha $(n, k) = 1$. Az ilyenek száma $\varphi(n)$.
A harmadik állítás következik egy későbbi tételből.

4.3.22. Tétel (nehéz)

Véges test multiplikatív csoportja ciklikus. Így $\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z}_{p-1}^+$.