Bsc algebra3a gyakorlat

Második feladatsor

1. ***(K2.2.8)*** Mutassuk meg, hogy minden műveletre nézve legfeljebb egy neutrális elem lehet.

2. ***(K2.2.10)*** Igazoljuk, hogy asszociatív műveletnél minden elemnek csak egy inverze lehet, sőt egy elem mindegyik balinverze megegyezik mindegyik jobbinverzével.

3. ***(K4.1.15)*** Ha f és g transzformációk, milyen kapcsolatban állnak f és gfg^{-1} fixpontjai?

4. ***(K4.1.16)*** Legyen r a $\overrightarrow{PP'}$ eltolás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor grg^{-1} a $\overrightarrow{g(P)g(P')}$ eltolás.

5. ***(K4.1.17)*** Legyen t az e egyenesre való tükrözés. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gtg^{-1} a $g(e)$ egyenesre való tükrözés.

6. ***(K4.1.18)*** Legyen f a P pont körüli α szögű forgatás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként.

7. ***(K4.1.36)*** Tegyük föl, hogy f és g fölcserélhető transzformációk az X halmazon. Mutassuk meg, hogy f a g fixpontjainak halmazát önmagára képzi.

8. ***(K4.1.37)*** Mikor fölcserélhető két egyenesre tükrözés a síkon?

9. ***(K4.1.23)*** Igazoljuk, hogy a D_n diédercsoportban $f^i(tf^j) = tf^{j-i}$.

10. ***(K4.1.39*)*** A tér mely egybevágóságainak a négyzete az identitás?

11. ***(K4.3.29)*** Határozzuk meg $\mathbb{Z}_m^+$ és $\mathbb{Z}_m^\times$ elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7$, 8, 12.

12. ***(K4.3.30)*** Határozzuk meg a g elem rendjét a G csoportban, ha $G = \mathbb{R}^+$, $g = -1$; $G = \mathbb{R}^\times$, $g = -1$; $G = \mathbb{Z}_{19}^+$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{19}^\times$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{32}^+$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{32}^\times$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^+$, $g = x + 1$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^\times$, $g = 5$.

13. ***(K4.3.11)*** Mi a sík egybevágósági transzformációinak a rendje?

14. ***(K4.3.33)*** Hány 2, 3, 4, 5, 6, illetve 12 rendű elem van A_7-ben?

15. ***(K4.3.39)*** Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű, fölcserélhető elemei egy csoportnak, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?

16. ***(K4.3.40)*** Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G kommutatív. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?

17. ***(K4.3.41*)*** Mutassuk meg, hogy $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ (a, n, m pozitív egész).

18. ***(K4.3.34)*** Mely véges csoportokban nincs prímrendű elem?

19. ***(K4.3.37)*** Igaz-e tetszőleges G csoportban, hogy ha G-ben van d rendű elem, akkor ezek száma legalább $\varphi(d)$? És az, hogy pontosan $\varphi(d)$?

20. ***(K4.3.38)*** Ciklikus-e a 3-hatványadik komplex egységgyökök csoportja a szorzásra?

21. ***(K4.3.18, 4.3.21)*** Határozzuk meg a $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_{12}^+$ és $\mathbb{Z}_{17}^\times$ összes generátorelemét.

22. ***(K4.4.32*)*** Igazoljuk, hogy egy véges csoport rendje pontosan akkor páros, ha van másodrendű eleme.