Bsc algebra3a gyakorlat
Első feladatsor

Leggyorsabb **elérhetőség:** `ewwkiss@gmail.com`. Letölthető **előadásjegyzet, feladatsorok:** `http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/faliujsag/`. A K1.2.4 jelölés a Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába* tankönyvre utal, az így jelölt feladatok megoldásai elérhetők a fenti honlapon. **Konzultáció** a hivatalos fogadóórákon kívül is kérhető emailben.
Gyakorlati jegy. A két **évfolyamzárthelyit** legalább **12 + 12** pontosra kell megírni; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. Emellett a gyakorlatokon írt **röpdolgozatokból** is megfelelő eredményt kell elérni. Az első tanítási hét, valamint a két ZH hetének kivételével minden gyakorlaton lesz röpdolgozat: az előző heti előadás anyagából egy definíciót vagy tételt kell leírni (segédeszköz használata nélkül). A 10 alkalomból **10 pontot** (50%-ot) kell elérni ahhoz, hogy a gyakorlati jegy ne legyen elégtelen. A teljesen precíz válaszra 2 pont, apró hibák esetén 1 pont jár.

1. ***(K4.2.18)*** Igazoljuk, hogy $(123) = (231)$, sőt általában egy ciklust bármelyik eleménél kezdve ugyanazt a permutációt kapjuk. Hány n hosszú ciklus van S_n-ben?

2. ***(K4.2.25)*** Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad \big[(12)(23)(34)\big]^{1222}\,.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$-en értelmezett „hátulról előre” permutációval is.

3. ***(K4.2.23)*** Igazoljuk, hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3) \ldots (x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$.

4. ***(K4.8.14)*** Mutassuk meg, hogy ha $(x_1 \ldots x_k)$ egy ciklus az S_n csoportban, és $f \in S_n$, akkor $f \circ \big(x_1 \ldots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$.

5. ***(K4.2.31)*** Mely $f \in S_n$ permutációk cserélhetők föl az $(1, 2, \ldots, n)$ ciklussal?

6. ***(K4.2.30)*** Igazoljuk, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.

7. ***(K4.2.33)*** Legyen adott S_n transzpozícióinak egy halmaza. Készítsünk egy G gráfot az $\{1, 2, \ldots, n\}$ csúcshalmazon úgy, hogy ha a halmazban benne van az (ab) transzpozíció, akkor behúzzuk az a-t b-vel összekötő élet. Bizonyítsuk be a következő állításokat.

(1) Ha G összefüggő, akkor az adott transzpozíciók alkalmas szorzataként minden permutáció előállítható (a szorzatban ugyanaz a transzpozíció többször is szerepelhet).
(2) Ha i és j a G gráf különböző komponenseiben vannak, akkor az adott transzpozíciók szorzataként nem állítható elő egyetlen olyan permutáció sem, amely i-t j-be viszi.

8. ***(K4.2.34)*** Igazoljuk, hogy S_n valamennyi eleme előáll legfeljebb $n-1$ darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez $n - 1$ transzpozíciónál kevesebb nem elég?

9. ***(K4.2.35*, OKTV)*** Legyenek k és t egynél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok $1, 2, \ldots, n$ sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet fölcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden lehetséges sorrendhez, ha $k + t - 1 \leq n$.

10. ***(K4.2.32)*** Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusok nélkül).