NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk az $\mathbb{R}[x]$-ben, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy a λ skalár és az $f(x)$ polinom szorzata $(2\lambda - 1)f(x)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

Pl. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$, $f(x) = 1$, $\lambda = \mu = 2$.

12. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „A $\mathbb{C}$ fölötti $\mathbb{C}^{2\times 2}$ vektortér $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható mátrixai alteret alkotnak.”

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ benne van, de az összegük nincs.

13. Adjunk ellenpéldát erre: Ha u, v, w lineárisan összefüggő, akkor u függ $\{v, w\}$-től.

$v = w = 0$, $u = x \in \mathbb{R}[x]$

14. Mennyi lehet a $\mathbb{C}^{3\times 3}$-beli mátrixok $\mathbb{C}$ fölötti vektorterében egy 8- és egy 7-dimenziós altér metszetének dimenziója?

6, 7.

15–16. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a S, T, L, K, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A összegtartó.
(T) A skalárszorostartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(K) Leképezések összegének definíciója.
(X) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda A)(v + w) = \quad \boxed{\text{L}}$$

$$\lambda\big(A(v + w)\big) = \quad \boxed{\text{S}}$$

$$\lambda\big(A(v) + A(w)\big) = \quad \boxed{\text{X}}$$

$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(A(w)\big) = \quad \boxed{\text{L}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda A)(w)$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb **harmad**fokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to \mathbb{C}$, melyre $A(p) = p(2i)$. Mi A mátrixa a szokásos bázispárban?

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

18. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrixhoz $2M - 2M^T$-t rendel?

6

19. Legyen A a térben az z-tengely körüli 90 fokos forgatás. Mely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén lesz $\det(2A + \lambda I) = 0$?

-2

20. Ha A komplex fölötti lineáris leképezés, $A(v) = iv$, továbbá $f(x) = 2x^2 - 1$, akkor mennyi $(f(A) - A^2)(-v)$?

$2v$

21. Hány megoldása van az $X^8 = 2E$ egyenletnek $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben?

0

22. Maximum hány páronként nem hasonló olyan $M \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ mátrix létezik, melynek minimálpolinomja x^2?

3

23. Az $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ minimálpolinomja $x(x-3)$. Mik M karakterisztikus polinomjának a lehetséges értékei?

$x^2(x-3)$, $x(x-3)^2$.

24. Mennyi $(1,1,1,1)$ és $(-1,0,-1,-1)$ szöge?

$150°$

25. Adjunk meg egy olyan $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható, de $\mathbb{C}$ fölött ONB-ben nem diagonalizálható (négyzetes) valós mátrixot, amelynek sajátértéke az i.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

26. Egy 3×3-as unitér mátrix főátlójában álló elemek összege $-3i$. Mik a determinánsának a lehetséges értékei?

i

27. Mely önadjungált mátrixoknak $(x-2)^2$ a karakterisztikus polinomja?

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

28. A térbeli A lineáris transzformációnak sajátvektora $(2,1,0)$. Adjuk meg A^* egy kétdimenziós invariáns alterét.

A $2x + y = 0$ sík.

29. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(1,0,i)^T$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(0,1,0)^T$, $(i,0,1)^T$.

30. Egy háromváltozós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a bal felső sarokban álló mindegyik aldetermináns értéke negatív. Milyen karakterek lehetségesek?

Indefinit.