NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk az $\mathbb{R}[x]$-ben, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy a λ skalár és az f polinom szorzata $f(\lambda)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

Pl.

12. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „A $\mathbb{C}$ fölötti $\mathbb{C}^{2\times 2}$ vektortér azon mátrixai, amelyekben a főátló elemeinek négyzetösszege nulla, alteret alkotnak.”

13. Adjunk meg olyan u, v, w vektorokat, hogy $\{u, v\}$ és $\{v, w\}$ összefüggő legyen, de $\{u, w\}$ ne legyen az.

14. Legyen V az $\mathbb{R}^{3\times 3}$-beli szimmetrikus mátrixok vektortere $\mathbb{R}$ fölött, és W olyan valódi altere V-nek, amelyben van 3 független és 4 összefüggő vektor. Mennyi lehet W dimenziója?

15–16. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, L, S, D, A, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) A, illetve B összegtartó.
(L) A, illetve B skalárszorostartó.
(S) Leképezések összegének definíciója.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(A) Vektortéraxiómák.
(X) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont; 3 v. 2 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.

$$(A+B)(v+w) = \quad \square$$

$$A(v+w) + B(v+w) = \quad \square$$

$$\big(A(v) + A(w)\big) + \big(B(v) + B(w)\big) = \quad \square$$

$$\big(A(v) + B(v)\big) + \big(A(w) + B(w)\big) = \quad \square$$

$$(A+B)(v) + (A+B)(w)$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nullapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \to \mathbb{C}$, melyre $A(p) = p(i-1)$. Mi A mátrixa a szokásos bázispárban?

18. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixhoz $M - 2M^T$-t rendel?

19. Legyen A a térben az $x+y+z=0$ egyenletű síkra tükrözés. Mennyi $A+I$ determinánsa?

20. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^7)$-nek az $1+i$ sajátértékhez tartozó sajátaltere háromdimenziós, akkor mennyi lehet $r(A)$?

21. Adjunk meg egy olyan $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot, amelynek sajátértékei pontosan ± 1, de $M^2 \neq E$.

Pl.

22. Maximum hány páronként nem hasonló olyan $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mátrix létezik, melyre $M^3 = 0$?

23. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ minimálpolinomja $x^4 - x$. Mi lesz A^3 minimálpolinomja?

24. Mennyi $(1,1,1,1)$ és $(1,0,1,1)$ szöge?

25. Adjunk példát olyan **nem** normális valós mátrixra, amely $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható, de $\mathbb{R}$ fölött nem.

26. Egy önadjungált mátrix minimálpolinomja $x^k + 1$. Mik k lehetséges értékei?

27. Mely $\lambda \in \mathbb{C}$ számokra teljesül, hogy ha M unitér, akkor λM is az?

28. Legyen A a térben a z-tengely körüli $91°$-os forgatás. Adjuk meg A^* egy sajátvektorát.

Pl.

29. Adjuk meg $\mathbb{C}^2$-ben a $(3,i)^T$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

30. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a főátlóban van nulla, akkor a kvadratikus alak indefinit.”