Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2018. május 17.) — eredmények és pontozás

1. A transzformáció mátrixa a szokásos bázisban

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} \quad \text{(1 pont).}$$

Ez akkor önadjungált, ha $z = 0$ és w valós (1 pont). Az $MM^* = M^*M$ mátrix diagonális, a főátló első három eleme $|z|^2$, a negyedik $|w|^2$, ezért A mindig normális, azaz ONB-ben diagonalizálható (1 pont) és pontosan akkor unitér, ha $|z| = |w| = 1$ (1 pont). Mivel $A(v) = (-1, 1, i, -i)^T$ (1 pont), ezért $\langle A(v), v\rangle = \overline{-1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot i + \overline{i} \cdot (-i) + \overline{(-i)} \cdot (-i) = -1 + i - 1 + 1 = -1 + i$ (1 pont).

2. A mátrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), a sajátértékek ± 1 és ± 5 (2 pont), ezért az alak indefinit (1 pont). A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$\Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\Big)^2 - \Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 5\Big(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\Big)^2 - 5\Big(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

3. A karakterisztikus polinom $x^3(x-1)$ (1 pont), a sajátértékek 1 és 0 (háromszoros) (1 pont). A normált osztók, melyeknek minden sajátérték gyöke: $x(x-1)$, $x^2(x-1)$ és $x^3(x-1)$. Az első kettőnek a mátrix nem gyöke (a harmadiknak a Cayley–Hamilton-tétel miatt igen), ezért a minimálpolinom $x^3(x-1)$ (2 pont). A Jordan-alakban tehát a legnagyobb 0-hoz tartozó blokk 3×3-es, vagyis az eredmény

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 pont).}$$

4. A lineáris egyenletrendszer általános megoldása $(z, 2z, z)$, ezért b_1-nek megfelel $\big(1/\sqrt{6}\big)(1, 2, 1)$ (2 pont). A Gram-Schmidt eljárás nélkül is kitalálható, hogy például $b_2 = \big(1/\sqrt{2}\big)(1, 0, -1)$ normált és merőleges b_1-re (2 pont). A Gram-Schmidt-eljárással $b_3 = \big(1/\sqrt{3}\big)(1, -1, 1)$ (2 pont). (A b_3 megkapható vektoriális szorzással is.)

5. Mivel $\langle A(v), A^*(v)\rangle = \langle A^2(v), v\rangle$, ezért $A(v) \perp A^*(v) \iff A^2(v) \perp v$ (1 pont). Ha v sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor $A^2(v) = \lambda^2 v$, és így $0 = \langle \lambda^2 v, v\rangle = \overline{\lambda}^2 \|v\|^2$, azaz $\lambda = 0$ (3 pont). Ha A normális, akkor tehát a diagonális alakjában a főátló minden eleme nulla, és ezért $A = 0$ (2 pont). Ha nem tesszük föl, hogy A normális, akkor a feladat feltétele azzal lesz evivalens, hogy $A^2 = 0$. Legyen $B = A^2$, azt kell belátni, hogy $W = \mathrm{Im}(B) = 0$. Mivel W egy B-invariáns altér, ezért ha $W \neq 0$, akkor($\mathbb{C}$ fölött) van benne B-nek egy w sajátvektora. A fentihez hasonlóan az ehhez tartozó sajátérték nulla, azaz $B(w) = 0$. Mivel $w \in W$, ezért $w = B(v)$ alkalmas v-re. Ekkor $B(v + w) = w$ is teljesül, ezért a feltétel szerint w-re v és $v + w$ is merőleges. De akkor a különbségük, azaz w is merőleges w-re, ami ellentmond annak, hogy $w \neq 0$ (6 pont).

6. A minimálpolinom mindenképpen $(x-2)(x-3)$ (1 pont). Valóban, a dimenziótétel miatt $A - 2I$ és $A - 3I$ magtere is 2-dimenziós (2 pont). Ezért 2 és 3 is sajátérték, melyek geometriai multiplicitása 2 (1 pont). De $2 + 2 = 4$ a tér dimenziója, így a transzformáció diagonalizálható és nincs más sajátérték (1 pont). Példának megfelel egy olyan diagonális mátrix, amelynek a főátlójában 2 darab 2-es és 2 darab 3-as van (1 pont).