Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2018. március 22.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

1. Mely $a \in \mathbb{R}$ esetén tartalmazza az $\langle x^2 - a^2, x^2 - ax, x - a \rangle$ altér az x polinomot?

2. Legyen V a sík $\mathbb{R}$ fölött. A $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa az $\big((1,0),(1,2)\big)$ bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mi C mátrixa a $\big((2,2),(1,0)\big)$ bázisban? Hová viszi C a $(3,2)$ pontot? $(3+3$ pont.)

3. Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, W pedig a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ fölött, továbbá A, illetve B az a $V \to W$ leképezés, melyre

a) $A(f) = f(i) + 1$;
b) $B(f) = f(i+1)$.

Amelyik nem lineáris leképezés A és B közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig az, annak adjuk meg a mátrixát a szokásos bázispárban (4 pont), de ne igazoljuk, hogy lineáris.

4. Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló vektortér $\mathbb{R}$ fölött. Álljon az U altér azokból a polinomokból, amelyeknek gyöke az i és W azokból, amelyeknek gyöke a 0. Adjunk meg egy bázist $U + W$-ben, és egyet $U \cap W$-ben.

5. Legyen V a sík lineáris transzformációinak vektortere $\mathbb{R}$ fölött, továbbá

a) $W_1 = \{A \in V \,:\, A \text{ az } (1,0) \text{ pontot az origóba viszi}\}$;
b) $W_2 = \{B \in V \,:\, B \text{ hasonlósági transzformáció}\}$.

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig altér, annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (4 pont), de ne igazoljuk, hogy altér. A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

6. Legyen F a pozitív irányú 30 fokos forgatás a síkon az origó körül. Mutassuk meg, hogy az $\{F, F^2, \dots, F^{2018}\}$ rendszer rangja 2.