Proginfo lineáris algebra gyakorlat

*Első zárthelyi **A** (2017. 11. 08.)*

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges** (a számolás részletei), a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak, a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Név és NEPTUN-kód **minden lapon OLVASHATÓ nyomtatott betűkkel** szerepeljen.

1. Adjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer **általános** megoldását.

$$\begin{aligned} 2\,x - y + z &= 2 \\ 7\,x - 3\,y + 5\,z &= 5 \\ -\,x \phantom{{}-3\,y} - 2\,z &= 1 \end{aligned}$$

2. Tekintsük az alábbi vektorokat, és legyen $U = \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Döntsük el, benne van-e $\mathbf{d}$ az U altérben (indoklással 3 pont), és adjunk meg ebben az altérben egy bázist, valamint az altér dimenzióját ($2 + 1$ pont).

3. Emeljük négyzetre az M mátrixot és számoljuk ki M^2 inverzét, továbbá M rangját.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Alteret alkotnak-e az $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorok alábbi halmazai? Amelyik igen, abban adjunk meg egy bázist, amelyik nem, ott indokoljuk ezt meg.

(1) $x_1^2 + x_2 = 2x_3^2$;
(2) $x_1 - 2x_2 = 2x_3$.

5. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathrm{Span}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a})$.

6. Az U altere $\mathbb{R}^5$-nek és $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^5$. Tudjuk, hogy

(1) $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 \in U$ és $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \in U$.
(2) $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \notin U$ és $\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 \in U$.

Mutassuk meg, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in U$ (2 pont), és adjunk példát (U-t, $\mathbf{b}_1$-et és $\mathbf{b}_2$-t), amikor $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \notin U$.