Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2016. május 17.) — eredmények és pontozás

1. Ha $v = (0,1,0,1)$, akkor a Gram-Schmidt eljárással $b_3 = (1/2)(-1,1,1,1)$ (4 pont). A W normálvektora $n = (1/2)(1,1,1,-1)$ (1 pont), ezért a keresett távolság $|\langle n, (0,0,0,1)\rangle| = 1/2$ (1 pont).

2. A mátrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), a sajátértékek 3, -2 és 0 (2 pont), ezért az alak indefinit (1 pont). A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$3\Big(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\Big)^2 - 2\Big(\frac{y-z}{\sqrt{2}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

3. A karakterisztikus polinom $x^3(x-1)$ (1 pont), a sajátértékek 1 és 0 (háromszoros) (1 pont). A normált osztók, melyeknek minden sajátérték gyöke: $x(x-1)$, $x^2(x-1)$ és $x^3(x-1)$. Az elsőnek a mátrix nem gyöke, a másodiknak igen, ezért a minimálpolinom $x^2(x-1)$ (2 pont). A Jordan-alakban tehát a legnagyobb 0-hoz tartozó blokk 2×2-es, vagyis az eredmény

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

Az eredeti mátrix rangja 2, ezért 0-hoz tartozó blokk nem lehet 3×3-as (mert akkor 3 lenne a Jordan-alak rangja), de nem lehet a Jordan-alak diagonális sem, mert annak a rangja 1 lenne (1 pont).

4. A transzformáció mátrixa a szokásos bázisban

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ -z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

Ez akkor önadjungált, ha $z = \overline{z}$ és $z = -\overline{z}$ is teljesül, azaz ha $z = 0$ (1 pont). Az $MM^* = M^*M$ mátrix diagonális, a főátlóban végig $|z|^2$ szerepel, ezért A mindig normális, azaz ONB-ben diagonalizálható (1 pont) és pontosan akkor unitér, ha $|z| = 1$ (1 pont). Mivel $A(v) = (-2,1,2i,-i)^T$ (1 pont), ezért $\langle A(v), v\rangle = \overline{-2}\cdot 1 + \overline{1}\cdot(-i) + \overline{2i}\cdot 2 + \overline{(-i)}\cdot 2i = -4-5i$ (1 pont).

5. Az $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ választás megfelelő, hiszen mindkét mátrix karakterisztikus polinomja is, minimálpolinomja is x^2+1 (3 pont). Az nem lehetséges, hogy N két komplex sajátvektora ortogonális legyen. Tegyük fel ugyanis, hogy M és N ilyen. Ekkor N két ortogonális sajátvektorát lenormálva olyan ONB-t kapnánk, amelyben N diagonális, és így N normális lenne. Viszont a két karakterisztikus polinom egyenlő, ezért a sajátértékek is ugyanazok. Mivel M unitér, a sajátértékei 1 abszolút értékűek. Ezért ez igaz N-re is, tehát N is unitér, ami ellentmondás (3 pont).

6. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $\dim(V) = n$. Ha A rangja, azaz képterének dimenziója 1, akkor a dimenziótétel miatt $\dim \mathrm{Ker}(A) = n-1$. Legyen $b_1, \ldots, b_{n-1}$ bázis $\mathrm{Ker}(A)$-ban, ezek sajátvektorok 0 sajátértékkel. Ha A-nak van olyan v sajátvektora, amelyhez tartozó sajátérték nem nulla, akkor $v \notin \mathrm{Ker}(A)$, és ezért $b_1, \ldots, b_{n-1}, v$ generátorrendszer V-ben (a valódi altér dimenziójáról szóló tétel miatt). Ez a rendszer az elemszáma miatt bázis is, amely sajátvektorokból áll, tehát A diagonalizálható (4 pont). Megfordítva, ha A diagonalizálható, és minden sajátértéke nulla, akkor A mátrixa az ennek megfelelő bázisban a nullmátrix, amelynek azonban nem 1 (hanem 0) a rangja (2 pont).