Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2017. május 17.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

1. Álljon W azon (x, y, u, v) pontokból $\mathbb{R}^4$-ben, melyekre $x + y + u - v = 0$. Egészítsük ki a $b_1 = (1/\sqrt{2})(1, 0, 0, 1)$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 1, -1, 0)$ rendszert W ortonormált bázisává, és határozzuk meg a $(0, 0, 0, 1)$ pont távolságát a W altértől.

2. Határozzuk meg az $x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$ valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixát, ONB-ben vett négyzetösszeg alakját és karakterét.

3. Mi lesz a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix minimálpolinomja és Jordan-alakja? Hogyan lehetne leolvasni a Jordan-alakot a karakterisztikus polinom ismeretében úgy, hogy nem számítjuk ki a minimálpolinomot?

4. Tekintsük $\mathbb{C}^4$-en az

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zu_4 \\ zu_2 \\ zu_3 \\ -zu_1 \end{bmatrix}$$

transzformációt. Vizsgáljuk meg, hogy $z \in \mathbb{C}$ mely értékeire lesz A diagonalizálható **ortonormált** bázisban $\mathbb{C}$ fölött; unitér; illetve önadjungált. Számítsuk ki az $\langle A(v), v\rangle$ skaláris szorzatot abban az esetben, amikor $v = (1, -i, 2, 2i)^T$ és $z = i$.

5. Adjunk meg $M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixokat úgy, hogy M unitér, N nem unitér, de a karakterisztikus polinomjuk is, a minimálpolinomjuk is ugyanaz. Lehet-e N-nek két ortogonális komplex sajátvektora?

6. Mutassuk meg, hogy egy (véges dimenziós téren értelmezett) 1 rangú lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha van nem nulla sajátértéke.