**Bsc algebra2 normál gyakorlat**

*Első zárthelyi (2017. március 29.) — eredmények és pontozás*

**1.** A $W_1$ nem altér, mert $2x$ és $2x^2$ benne van, de az összegük nincs (2 pont). A $W_2$ dimenziója 3 (1 pont). Ha $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, akkor a feltétel $d = f(1) = a + b + c + d$. Bázis például 1, $x^2 - x$, $x^3 - x$ (1 pont). A függetlenség és a generátorrendszer-tulajdonság ellenőrzése 1+1 pont. Egy lehetséges gondolatmenet a következő. A megadott polinomok függetlenek, mert csupa különböző fokúak. A $W_2$ valódi altér, mert pl. $x$ nincs benne, így dimenziója legfeljebb 3, és így minden 3 elemű független rendszer max. független, azaz bázis.

**2.** A $B$ nem lineáris, mert ha $M = E$, akkor $B(2M) = -2E$, ami nem egyenlő $2B(M) = 0$-val (2 pont). Az $A$ lineáris (0 pont), a szokásos bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

**3.** A bázistranszformáció képletének alkalmazásához az új bázis elemeit fel kell írni a régi segítségével. Nyilván $(1,3) = 0 \cdot (1,2) + 1 \cdot (1,3)$ és $(1,2) = 1 \cdot (1,2) + 0 \cdot (1,3)$, ezért $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), ennek inverze önmaga (1 pont), ezért a képlet szerint az új mátrix $S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont). Az $(1,1)$ pont képének kiszámításához meg kell határoznunk e pont koordinátáit a régi bázisban (számolhatnánk az új bázisban is). Az $\alpha(1,2) + \beta(1,3) = (1,1)$ egyenletrendszer megoldása $\alpha = 2$ és $\beta = -1$ (1 pont). Ezért a $[C(v)] = [C][v]$ képletet a régi bázisban alkalmazva $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vagyis az $(1,1)$ pont képe $-1 \cdot (1,2) + 0 \cdot (1,3) = (-1,-2)$ (2 pont).

**4.** Az $a = 0$ megfelelő, mert $x^2 - 1$ és $-1$ függetlenek (1 pont). Ugyancsak megfelel az $a = 1$, mert $x^2 - 1$ és $x - 1$ is függetlenek. Más megoldás nincs, mert ebben az esetben a három polinom lineárisan független lesz (ennek precíz kiszámolása 4 pont). *Második megoldás:* ha $a \neq 0, 1$, akkor ezek a polinomok generálják a legfeljebb másodfokú polinomok alterét. Valóban, a generált altérben benne van $ax^2 - 1 - (x^2 - 1) = (a-1)x^2$, ezért $a \neq 1$ miatt $x^2$ és így 1, tehát $ax - 1$ miatt $ax$ is, és mivel $a \neq 0$, benne van $x$ is (4 pont).

**5.** Az előírhatósági tétel miatt van olyan $A$ lineáris transzformáció, melynél $(1,0,0) \mapsto (0,0,0)$, $(0,1,0) \mapsto (0,0,0)$, $(0,0,1) \mapsto (1,0,0)$, ennek mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4 pont). Ennek magterében benne van az első két bázisvektor, és így az általuk generált $xy$ sík is, képterében pedig benne van az $x$-tengely (1 pont). Mivel a dimenzióik összege 3, ezért a dimenziótétel miatt sem a magtér nem lehet bővebb az $xy$ síknál, sem a képtér az $x$-tengelynél (1 pont).

**6.** Például ha $W$ az $\begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixokból áll, az megfelelő lesz (3 pont). Ennek a diagonális mátrixok alterével való metszete csak a nullmátrixból áll, hiszen ha a fenti mátrix diagonális, akkor $a = b = 0$ (1 pont). Ekkor pedig $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4$ (1 pont). Ezért $U + W$ nem lehet valódi altér a 4-dimenziós $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben (1 pont). *Megjegyzés:* a megoldásra úgy lehet például rájönni, hogy a diagonális mátrixok között bázist keresünk, hozzátesszük a feladatban megadott mátrixot, és ezt kiegészítjük $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bázisává:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $W$ alteret az utolsó két mátrix generálja.