Bsc algebra1 normál gyakorlat

Második zárthelyi B (2016. december 16.) — eredmények és pontozás

1. Az eredmény $x^{20} - x^{15} + x^{10} - x^5 + 1$, mert

$$\Phi_{50}(x) = \frac{x^{50}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{25}} = \frac{x^{50}-1}{(x^{10}-1)\Phi_{25}(x)} = \frac{x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1}{x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1} \quad \text{(idáig 4 pont).}$$

Második megoldás:

$$\Phi_{50}(x) = \frac{x^{50}-1}{\Phi_1\Phi_5\Phi_{25}\Phi_2\Phi_{10}} = \frac{x^{50}-1}{(x^{25}-1)\Phi_2(x)\Phi_{10}(x)} = \frac{x^{25}+1}{x^5+1},$$

mert $\Phi_2(x)\Phi_{10}(x) = (x^{10}-1)/\big(\Phi_1(x)\Phi_5(x)\big) = (x^{10}-1)/(x^5-1)$.

2. A mátrix determinánsa ismételt kifejtéssel $3c^2 + d^2$ (4 pont), az kell, hogy ez semmilyen c-re se legyen nulla. Ez akkor teljesül, ha $d \neq 0$ (2 pont).

3. Mivel $g(x) = (x-abc)(x-abd)(x-acd)(x-bcd)$ (1 pont), ezért a keresett együttható

$$-(abcd)^2(a+b+c+d) = -\sigma_4^2\sigma_1 \quad \text{(3 pont).}$$

Mivel $\sigma_1 = -2$ és $\sigma_4 = 5$, ezért az eredmény 50 (2 pont).

4. Az (1) esetben $b = 15$ megfelelő, mert akkor a Schönemann–Eisenstein teljesül $p = 3$-ra, de a polinom nem primitív, hiszen 5-tel osztható (2 pont). A $p = 3$ megfelel akkor is, ha $b = 3$, de ekkor a polinom primitív is, ez a megoldás a (2) pontban (2 pont). Végül ha $b = -235$, akkor a polinomnak gyöke az 1, és így (3) teljesül (2 pont).

5. Relatív prímek, mert a két polinomnak nincs közös komplex gyöke. Valóban, ha $\varepsilon^6 = -1$ és $\varepsilon^{15} = -1$, akkor az első miatt $\varepsilon^{30} = (-1)^5 = -1$, a második miatt $\varepsilon^{30} = (-1)^2 = 1$, ellentmondás.

6. $\mathbb{Z}_2$ fölött $x^5 + x + 1 = (x^2+x+1)(x^3+x^2+1)$ (4 pont). Mindkét tényező irreducibilis $\mathbb{Z}_2$ fölött, mert a fokuk 2, illetve 3, és nincs gyökük $\mathbb{Z}_2$-ben (2 pont).