Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Kilencedik feladatsor — megoldások

Sajátérték, sajátvektor, diagonalizálhatóság. Ha M négyzetes mátrix és $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ alkalmas $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ oszlopvektorra és λ skalárra (λ lehet nulla), akkor $\mathbf{v}$ **sajátvektora,** λ **sajátértéke** M-nek. A λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér** az $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ összefüggésnek eleget tevő $\mathbf{v}$ vektorokból áll (tehát a nullvektorból és a λ-hoz tartozó sajátvektorokból). Az M mátrix **diagonalizálható,** ha van olyan bázis az egész térben, mely M sajátvektoraiból áll. A sajátértékek az M **karakterisztikus polinomjának** a gyökei. Ez a $k_M(x) = \det(M - xI)$ polinom, amelynek foka ugyanakkora, mint M mérete. (Tehát *az M főátlójának minden eleméből kivonunk x-et, és kiszámítjuk a determinánst.*) A λ sajátértékhez tartozó *sajátvektorok komponenseire ezután (homogén) lineáris egyenletrendszert kapunk,* amelynek mindig van nemtriviális megoldása. Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok rendszere lineárisan független, így *egy $n \times n$-es mátrix* ***pontosan akkor diagonalizálható,*** *ha a sajátaltereinek összdimenziója n,* speciálisan *ha van n különböző sajátértéke, akkor biztosan az.*

4.

$$k_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)(2-x) - 1 = x^2 - 4x + 3\,.$$

Ennek gyökei (például a másodfokú egyenlet megoldóképletével számolva) $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. Ha $\mathbf{v} = [u, v]^T$ a $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor, akkor

$$1 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u+v \\ u+2v \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \left.\begin{aligned} 2u+v &= u \\ u+2v &= v \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldására nem érdemes Gauss-eliminációt használni, mindkét egyenlet nyilván azzal ekvivalens, hogy $v = -u$, ezért a $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátaltér az $[u, -u]^T$ alakú vektorokból áll, és a nullvektor kivételével ezek az 1-hez tartozó sajátvektorok. A $\lambda_2 = 3$ esetében a kapott egyenletrendszer mindkét egyenlete azt mondja, hogy $u = v$, ezért a 3-hoz tartozó sajátaltér elemei az $[u, u]^T$ alakú vektorok. Az $[1, -1]^T$ és az $[1, 1]^T$ függetlenek, és mivel ez két darab vektor, a kétdimenziós $\mathbb{R}^2$-ben bázist alkotnak. Ezért A diagonalizálható. Ez abból is következik, hogy az A mátrix 2×2-es, és két különböző sajátértéke van.

A B esetén $k_B(x) = (3-x)(2-x) - 20 = x^2 - 5x - 14$, a sajátértékek 7 és -2, a megfelelő sajátalterek az $[u, u]^T$, illetve az $[4u, -5u]^T$ alakú vektorokból állnak, B is diagonalizálható.

A $k_C(x)$-et megadó determinánst a második sora szerint érdemes kifejteni. Egyrészt mert ebben a sorban két nulla van, másrészt mert így a karakterisztikus polinomot szorzat alakban kapjuk, és ezért könnyebb meghatározni a gyökeit. Az eredmény: $k_C(x) = (1-x)(x^2-1)$, a sajátértékek 1 és -1, a megfelelő sajátalterek elemei $[u, v, u]^T$, illetve $[u, 0, -u]^T$. Noha csak két sajátérték van, a mátrix mégis diagonalizálható, pl. $[1, 0, 1]^T$, $[0, 1, 0]^T$ és $[1, 0, -1]^T$ sajátvektorokból álló bázis. Az 1-hez tartozó sajátaltér itt kétdimenziós.

Az utolsó oszlop szerint kifejtve $k_D(x) = (x^2 - 2x + 1)(-2 - x)$, a sajátértékek 1 és -2, a megfelelő sajátalterek elemei $[3u, -6u, 20u]^T$, illetve $[0, 0, u]^T$. Itt nincs három független sajátvektor, mert mindkét sajátaltér csak 1-dimenziós, és így D nem diagonalizálható.

(Alsó vagy felső) **háromszögmátrix sajátértékei a főátlóban álló számok,** hiszen a főátlóból x-eket levonva is háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata, és így a karakterisztikus polinomot is rögtön szorzat alakban kapjuk. Ezért E diagonalizálható, hiszen 3 különböző sajátértéke van. A sajátértékek tehát 1, 4 és 6, a megfelelő sajátalterek elemei rendre $[u, 0, 0]^T$, $[2u, 3u, 0]^T$, illetve $[16u, 25u, 10u]^T$.

5.

mátrix	a)	b)	c)	d)
sajátértékek	$2,\ -1$	1	$i,\ -i$	$1,\ -1$
sajátalterek elemei	$[u,0]^T,\ [u,-u]^T$	$[u,0]^T$	$[iu,u]^T,\ [-iu,u]^T$	$[u,u]^T,\ [u,-u]^T$
diagonalizálhatóság, $\mathbb{R}\,/\,\mathbb{C}$	I/I	N/N	N/I	I/I

Az A és B (négyzetes) mátrixok **hasonlók**, jele $A \sim_{\mathbb{R}} B$, ha van olyan S invertálható mátrix, hogy $B = S^{-1}AS$. (Ez a bázistranszformációhoz kapcsolódik.) *Hasonló mátrixoknak megegyezik a rangja, a karakterisztikus polinomja és a sajátértékei* (a sajátvektorok általában nem, de a sajátalterek dimenziója igen). *Egy M mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz (ennek főátlójában M sajátértékei állnak).*

6. Mindegyik háromszögmátrix, ezért a sajátértékek a főátlóból leolvashatók. Hasonló mátrixok sajátértékei ugyanazok, ezért csak $A \sim C$ és $B \sim D$ jön szóba. Az első igaz, mert A diagonalizálható, és diagonális alakja pont C. Viszont $D = I_2$ egységmátrix, és ezért $S^{-1}DS = S^{-1}S = I_2 = D$ bármilyen S-re, soha nem kapunk B-t. *Másik meggondolás:* a sajátalterek dimenziója nem ugyanaz B és D esetében (1, illetve 2).

7. A b) feladatban a sajátértékek 0, 1 és -1, ezért megfelel az a 3×3-as diagonális mátrix, amelynek a főátlójában ez a három szám áll (a többi eleme a mátrixnak nulla). A c)-beli polinom $(\lambda-1)^4$, ezért az I_4 egységmátrix jó. Az a)-ban nem valós (hanem komplex) számok a sajátértékek, ezért diagonális valós mátrix nem felelhet meg. Érdemes észrevenni, hogy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - ax - b \text{ és } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{bmatrix} \implies k_B(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c\,.$$

Ez minden méretben működik, az utolsó sorban a kívánt polinom együtthatói állnak fordított sorrendben és megfelelő előjellel, a főátló feletti ferde sorban 1-esek vannak, a többi elem 0.

8. Az M^{-1} sajátértékei az M sajátértékeinek reciprokai, a sajátvektorok ugyanazok. Ezt úgy igazolhatjuk, hogy az $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ egyenletet balról beszorozzuk M^{-1}-zel. Egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke, azaz ha $k_M(0) \neq 0$.

9. Ha $T\mathbf{v} = \lambda v$, akkor $T^2\mathbf{v} = T(T\mathbf{v}) = T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(T\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, és hasonlóan $T^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$. Ezért ha $T^4 = \mathbf{0}$, akkor $\lambda^4\mathbf{v} = \mathbf{0}$, de $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, ezért $\lambda^4 = 0$, azaz $\lambda = 0$. Hasonlóan, ha $T^k = I_n$, akkor $\lambda^k\mathbf{v} = \mathbf{v}$, ezért $\lambda^k = 1$. Ha $k = 5$, akkor tehát $\lambda = 1$, ha $k = 6$, akkor $\lambda = \pm 1$.

10. *(*)* A mátrix $n \times n$-es, mert $(3-x)^n$ foka n. Csak $A = 3I_n$ jó, mert $S^{-1}(3I_n)S = 3I_n$.

14. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \overline{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle}$ (komplex konjugált); $\langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\rangle$ és ugyanez a második változóban is. Ha λ skalár, akkor $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ és $\langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$. Végül $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = \mathbf{a}^*\mathbf{a}$ mindig nemnegatív valós szám, és csak akkor nulla, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

11. *(*)* Pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ megfelelő. Mivel $\det(A^TA) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$, ezért ha $\det(A) \neq 0$, akkor A^TA és A rangja is 2. Ezért egy ilyen példában $\det(A)$ csak 0 lehet.

15. *(*)* Felhasználjuk az $(AB)^* = B^*A^*$ azonosságot (ami akkor is érvényes, ha valamelyik tényező vektor). Elég belátni, hogy ha A^*A oszlopainak a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációja $\mathbf{0}$, akkor ugyanez A oszlopaira is igaz. Legyen $\mathbf{v} = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$, ekkor tehát $(A^*A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ezért $0 = (A^*A\mathbf{v})^*\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^*(A\mathbf{v})$. A **14.** feladat miatt $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A Vandermonde-determináns. Ha $n \geq 2$, akkor

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \quad (\text{itt } \binom{n}{2} \text{ tényező van}).$$

Az inverz mátrix képlete. Az A négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Ebben az esetben az A^{-1} mátrix i-edik sorának j-edik eleme $A_{ji}/\det(A)$, ahol A_{ji} az A mátrix j-edik sorának i-edik eleméhez tartozó **előjeles** aldetermináns. Tehát az előjeles aldeterminánsokat a „transzponált helyre" kell beírni (az i és j megcserélődik), és utána minden elemet elosztani $\det(A)$-val. Speciálisan a **3.** feladat megoldását is megkapjuk (a képlet a 6. feladatsor megoldásának első oldalán szerepel).

1. Mindegyik feladatban feltesszük, hogy $n \geq 2$. Mindegyik determinánst érdemes felírni $n = 2, 3, 4$-re, és a felfedezett szabályszerűségeket általánosítani.

a) A második sor -2-szerese az elsőnek, ezért a determináns nulla.
b) A második sor $\sqrt{2}$-szöröse az elsőnek, ezért a determináns nulla.
c) Ha $n \geq 3$, akkor vonjuk ki az első sort a másodikból és a harmadikból. A második sorból $a_2 - a_1$-et, a harmadikból $a_3 - a_1$-et kiemelve a két sor egyenlő lesz: 1-esekből áll. Ezért a determináns értéke nulla. A 2×2-es esetben az eredmény $(a_2 - a_1)(b_1 - b_2)$.
d) Ha $n \geq 3$, akkor vonjuk ki az első sort a másodikból és a harmadikból. A második sorból $a_2 - a_1$-et, a harmadikból $a_3 - a_1$-et kiemelve a két sor egyenlő: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Ezért a determináns értéke nulla. A 2×2-es esetben az eredmény $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$.
e) Ez a c) speciális esete: $a_j = j$ és $b_k = k - 1$. Az eredmény 0, illetve 2×2-esre -1.
f) Mindegyik sorból vonjuk ki az elsőt, utána a másodiktól kezdve a j-edik sorból emeljünk ki $j - 1$-et, végül a harmadiktól kezdve minden sorból vonjuk ki a másodikat. Ekkor a harmadik sortól kezdve a j-edik sor mindegyik eleme $j - 2$ lesz, emeljük ki ezt is. Ha $n \geq 4$, akkor a harmadik és a negyedik sor már egyforma lesz (csupa 1-es), ezért a determináns nulla. Az eredmény $n = 2$-re -7 és $n = 3$-ra -8.

2. $\det(U) = \det(U^T) = \det(-U) = (-1)^{99} \det(U) = -\det(U)$, ezért $\det(U) = 0$.

Az $n \times n$-es **tridiagonális** mátrix főátlója végig b, fölötte párhuzamosan végig c, alatta végig d szerepel, a többi eleme nulla. Jelölje a determinánsát $D_n = D_n(b, c, d)$.

$$D_4 = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ d & b & c & 0 \\ 0 & d & b & c \\ 0 & 0 & d & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ d & b & c \\ 0 & d & b \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} d & c & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & b \end{vmatrix} = bD_3 - cdD_2$$

(az első sor szerint kifejtettük, majd a második tagot még az első oszlopa szerint). Általában is $D_{n+1} = bD_n - cdD_{n-1}$, és nyilván $D_1 = b$, $D_2 = b^2 - cd$. Ez a rekurzív sorozat meghatározza D_n-et. Az alábbi feladatokban megsejtjük az eredményt és teljes indukcióval belátjuk.

12. $D_n(2, 1, 1) = n + 1$; $D_n(2/x, 1/x^2, 1) = (n + 1)/x^n$; $D_n(0, 1, 1) = 0$, ha n páratlan és $(-1)^{n/2}$ ha n páros; $D_n(\alpha + \beta, \alpha\beta, 1) = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j \beta^{n-j}$, ami $(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta)$ ha $\alpha \neq \beta$.

13. ***(*)*** Az első $\cos(n\varphi)$ (az utolsó sor szerint fejtsük ki). A második $\sin\big((n + 1)\varphi\big)/\sin\varphi$, ha $\sin\varphi \neq 0$. Ha $\varphi = 2k\pi$, akkor $n + 1$, ha $\varphi = (2k + 1)\pi$, akkor $(n + 1)(-1)^n$.