Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Nyolcadik feladatsor — megoldások

A determináns. Egy $n\times n$-es A mátrix $\det(A)$ determinánsa egy szám, amelyet a következő szabályok szerint számíthatunk ki. A módszer a Gauss-elimináció módosított változata.

(1) Bármely sorból bármelyik másik sor skalárszorosát kivonva a determináns értéke nem változik meg. Ugyanez az oszlopokra is igaz (de oszlopból sort nem vonhatunk ki).
(2) Ha egy sort (oszlopot) végigszorzunk egy c számmal, akkor a determináns értéke is c-vel szorzódik. (Vagyis bármely sorból/oszlopból kiemelhető bármilyen skalár.)
(3) Két sort (oszlopot) megcserélve a determináns előjelet vált.
(4) (Alsó vagy felső) háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
(5) Ha a determináns egy sora (oszlopa) végig nulla, akkor a determináns értéke is nulla.

A kiszámítás módszere tehát a következő. Ha az első oszlop végig nulla, akkor a determináns nulla. Ha nem, akkor egy sorcserével (közben a determináns előjelet vált) elérhető, hogy a bal felső sarokban álló elem ne legyen nulla. Ekkor az első sor alkalmas skalárszorosait a többi sorból kivonva ki tudjuk nullázni az első oszlop többi elemét. Ezt az eljárást folytatjuk a főátló többi elemével, mindig a főátló alatt nullázva csak. A végén, amikor a főátló alatt már minden elem nulla, az eredmény a főátló elemeinek a szorzata. (Karikázni nem szükséges, és az algoritmust sem kell mereven alkalmazni, pl. egy számot bármikor kiemelhetünk egy sorból/oszlopból, és cserélhetünk is sort vagy oszlopot, ha ettől egyszerűbb lesz a számolás.)

5. Az első és a harmadik mátrix esetében az eredmény -6, illetve 0. A fenti eliminációs eljárás a második determináns esetében a következő.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 24.$$

Az első lépésben a második sorból 2-t, a negyedik sorból 3-at emeltünk ki, és megcseréltük az első két sort. Utána az (új) első sort kivontuk az utolsóból és a négyszeresét a harmadikból. A harmadik lépésben először kicseréltük a második és a harmadik sort, azután a harmadik és a negyedik sort (ez két előjelváltással járt), végül a harmadik sor háromszorosát kivontuk a negyedik sorból. A végeredmény a főátló elemeinek szorzata: $(-6)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-4)$.

Kisebb méretű mátrixok esetében egyszerű képlet van a determináns kiszámítására.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,; \qquad \left|\begin{matrix} a & r & u \\ b & s & v \\ c & t & w \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & r \\ b & s \\ c & t \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} asw + rvc + ubt - \\ -usc - avt - rbw \end{matrix}$$

A második képlet a **csak 3×3-as determinánsra vonatkozó Sarrus-szabály,** amit a következőképpen lehet megjegyezni. Az első két oszlopot lemásoljuk a determináns jobb oldala mellé. Ezután a főátlóval párhuzamos három átló elemeit rendre összeszorozzuk és ezeket a szorzatokat összeadjuk (ez a képlet felső sora), majd a mellékátlóval párhuzamos három átló elemeit is összeszorozzuk, és ezeket az előző összegből kivonjuk (ez az alsó sor).

1. Az első két determináns háromszögmátrix, az értékük -1, illetve $1\cdot 4\cdot 6 = 24$, a negyediknél az első és a harmadik sort megcserélve (előjelváltás!) kapunk háromszögmátrixot, értéke -45. A harmadik determináns $0 + 1\cdot(-3)\cdot(-2) + 2\cdot(-1)\cdot 3 - 0 - 0 - 0 = 0$ a Sarrus-szabály alapján (a főátlóban és mindhárom mellékátlóban van nulla).

Az $n \times n$-es determináns képlete. Kiszámítani $n > 3$-ra nem ezzel érdemes, mert a Gauss-elimináció sokkal gyorsabb (a képletnek n faktoriális tagja van). A determináns i-edik sorának j-edik elemét jelölje a_{ij}. A Sarrus-szabály képlete ezzel a jelöléssel:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Az összegnek mind a hat tagja $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ alakú, ahol az i, j, k az 1, 2, 3 számok egy sorrendje (permutációja). A képletben mind a hat lehetséges permutáció pont egyszer szerepel, de mikor $+$ az előjel és mikor $-$? Ehhez meg kell számolnuk a permutációkban az **inverziókat.**

Ha például a 231 sorrendet vesszük, akkor itt az legelső 2-es után egy olyan szám áll, ami nála kisebb: az 1. Ez egy darab inverzió. Hasonlóan a 3-as után is egy ilyen szám áll, szintén az 1. Az 1-es után már nem áll (ilyen) szám. Ezért az inverziók száma $1 + 1 + 0 = 2$. Ez páros szám, ezért az előjel $+$ lesz, ez a fenti képletben a második tag. A 321 sorrendben 3 inverzió van, ami páratlan szám, ezért a képlet negyedik tagjának előjele $-$.

Az általános szabály a következő. Ha $1, 2, \ldots, n$-nek egy permutációját vesszük, akkor minden egyes szám esetében megszámoljuk, hogy a sorrendben utána lévő számok közül hány van, ami nála kisebb. Ezek alkotnak inverziót, és ezek számának összege a permutáció inverziószáma. Ha ez páros, akkor a permutáció páros és a képletben az előjel $+$ lesz, különben pedig $-$. Másképp: ha az i és j számok az adott sorrendben úgy szerepelnek, hogy i van előbb, de mégis $i > j$, akkor ez a pár inverziót alkot, különben nem.

4. Az a) esetben bekarikáztuk az inverzióban álló párokat (ahol az első szám a nagyobb).

5	2	4	1	6	3
	52	54	51	56	53
		24	21	26	23
			41	46	43
				16	13
					63

Az inverziók (karikák) száma 8, tehát ez páros permutáció. A b) esetben minden pár inverzióban áll, ezért az inverziók száma összes párok száma: $\binom{n}{2}$. Végül a c)-beli permutációban az 1 áll inverzióban az összes többi számmal, és más inverzió nincs, ezért $n-1$ inverzió van.

Az $n \times n$-es determináns képlete a következő. Az $1, 2, \ldots, n$ minden $i_1, \ldots, i_n$ permutációjában kiszámoljuk az inverziók számát. Ha ez páros szám, akkor az $a_{1i_1} \ldots a_{ni_n}$ szorzatot $+$ előjellel vesszük, különben $-$ előjellel. Az így kapott $n!$ szám összege a determináns értéke.

A determinánsra vonatkozó további hasznos tételek:

(1) **Transzponáláskor** a determináns értéke nem változik: $\det(A) = \det(A^T)$.
(2) A determinánsok **szorzástétele:** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
(3) Az A mátrix akkor és csak akkor **invertálható,** ha $\det(A) \neq 0$, ebben az esetben $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ (azaz $\det(A)$ reciproka). Az A determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha A oszlopai (sorai) lineárisan függetlenek.

2. $\det(A) = 6$ és $\det(B) = 2$ (háromszögmátrixok). Ezért az előbb felsorolt tételek alapján $\det(A^{-1}) = 1/6$, $\det(B^{-1}) = 1/2$, $\det(AB) = 6 \cdot 2 = 12$, $\det(A^{-1}B^{-1}) = 1/12$. Utóbbit a szorzat inverzét adó képletből is megkaphatjuk: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (megfordul a sorrend). Végül $\det(A + B)$-re nincs hasznos képlet, determinánsa pl. Sarrus-szabállyal számolva 6.

A determináns kifejtése. Ez a módszer ugyanolyan lassú, mint a determináns képletének használata, de hasznos pl. olyankor, amikor a determináns elemei maguk is képletek. Az i-edik sor j-edik eleméhez tartozó **előjeles aldeterminánst** a következőképpen kapjuk.

(1) Elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
(2) Kiszámítjuk a megmaradó $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsát.
(3) A kapott számot megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel (ettől előjeles).

A (3)-ban szereplő $(-1)^{i+j}$ előjelet a **sakktáblaszabály** alapján lehet megjegyezni:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Ennek az előjelnek **semmi köze** a determináns képletében látható „permutációs” előjelhez.

A determinánst bármely sora (oszlopa) szerint kifejthetjük. Végighaladunk az adott soron (oszlopon), az ott álló elemet megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk. Az eredmény (bármely sor/oszlop esetén) az eredeti mátrix determinánsa lesz. Ha az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme a_{ij}, a hozzá tartozó előjeles aldetermináns pedig A_{ij}, akkor pl. az első sorhoz, illetve az utolsó oszlophoz tartozó kifejtés

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \det(A) = a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{nn}A_{nn}\,.$$

Példaként az 5. feladat harmadik determinánsának első oszlop szerinti kifejtése

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}\,.$$

A keletkezett 3×3-as determinánsokat Sarrus-szabállyal számolhatjuk ki, de csak kettőt kell, ezért érdemes olyan sor vagy oszlop szerint kifejteni, ahol sok nulla van.

6. ***(*)*** Az első determinánsnál adjuk hozzá az első sort a többihez. Ez kinullázza a főátló alatti területet, a főátlóban pedig az $1, 2, 3, \ldots, n$ számok lesznek, ezért a determináns értéke ezek szorzata, azaz $n!$. A második determinánst úgy kell érteni, hogy minden eleme 2, kivéve a főátlót, ahol sorban az $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ számok vannak. Itt a második sort vonjuk ki a többiből (mert ez eltünteti a ketteseket a többi sorból). Ezután az új első sor kétszeresét a második sorhoz adva már felső háromszögmátrixot kapunk, a főátlóban $-1, 2, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-2$ áll. Ezért az eredmény $(-2)(n-2)!$. (Egy-egy ilyen feladat megoldásakor érdemes először $n = 2, 3, 4$ esetében próbálkozni, hogy lássuk, mi történik, és utána általánosítani).

7. A-nak a második és a negyedik oszlopa egyenlő, tehát az oszlopok lineárisan összefüggenek, és így a determinánsa nulla. (A második oszlopból kivonva a negyediket végig nulla lesz.) A B felső háromszögmátrix, determinánsa 24. A C nem négyzetes mátrix, nincs determinánsa. A D determinánsa nulla, mert a második oszlop végig nulla.

A többi determináns nehezebb, csak a megoldási ötletet és az eredményt adjuk meg. Az E determinánsa nulla, mert ha egy determinánsban van egy $k\times m$-es téglalapnyi csupa nulla, ahol $k+m$ nagyobb, mint a determináns mérete, akkor mindig nulla lesz a determináns értéke. Ezt be lehet bizonyítani például kifejtéssel és indukcióval, vagy meg lehet gondolni, hogy a determináns képletét felírva mindegyik tag nulla lesz, mert valamelyik tényező a téglalapba esik. Az F esetében az első oszlopot az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, stb. cserélve felső háromszögmátrixot kapunk, aminek a determinánsa $a_{n,1}a_{2,n-1}\dots a_{1,n}$. Ezt még meg kell szorozni $(-1)^k$-nal, ahol k az $(n-1)/2$ egész része, hiszen ennyi oszlopcserét végeztünk. A H determinánsa $a^n-(-b)^n$, speciálisan $\det(G)=(-1)^{n-1}$. Ezt vagy a determináns képlete alapján kaphatjuk (összesen csak két nem nulla tag lesz), vagy az első oszlop szerint kifejtve rekurzív képletet állíthatunk fel a determináns értékére. Az I mátrix első sorát a többiből kivonva felső háromszögmátrixot kapunk, az eredmény $b_1b_2\dots b_{n-1}$. Végül a J mátrix első sorát a másodikhoz, majd a kapott második sort a harmadikhoz, ezt a negyedikhez, stb. hozzáadva felső háromszögmátrixot kapunk, aminek a főátlója végig 1.

A **8. feladat** szorzása a komplex számokéra „hasonlít”, minden mátrix invertálható lesz, kivéve ha $a=b=0$, mert a determináns a^2+b^2. A **9. feladat** ennek egy általánosítása, az úgynevezett kvaterniók, itt is csak a nullamátrix lesz invertálható, a determináns $|\alpha|^2+|\beta|^2$.

Műveletek geometriai vektorokkal. A térben $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jelöli azt a bázist, amelynek vektorai a tengelyek pozitív irányába mutatnak (tehát páronként merőlegesek) és egységnyi hosszúak. A tér $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ pontjába az origóból mutató vektor tehát $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k}$, aminek a koordinátavektora ebben a bázisban $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^T$.

Ha $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]^T$, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ **skaláris szorzata** $\mathbf{ab}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3\in\mathbb{R}$, és $\mathbf{b}$ **hossza** $|\mathbf{b}|=\sqrt{\mathbf{bb}}=\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}$. Ez értelmes, mert $\mathbf{bb}>0$, ha $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$. Tulajdonságok:

$$\mathbf{ab}=\mathbf{ba};\qquad(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\mathbf{b};\qquad(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{ab});$$

és ugyanezek a második változóban is. *Tétel:* $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok 0 és 180° közötti szöge (ez a szög akkor értelmes, ha egyik vektor sem a nullvektor). Speciálisan $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontosan akkor merőlegesek (jele: $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$), ha $\mathbf{ab}=0$.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ **vektoriális szorzata**

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{i}-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\mathbf{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathbf{k}$$

(a determinánst az első sora szerint formálisan kifejtjük). Tulajdonságok:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a};\qquad(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b};\qquad(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b});$$

és ugyanezek a második változóban is. *Tétel:* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re, hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge. Tehát $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ pontosan akkor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos. Ha nem ez a helyzet, akkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ irányát (a két lehetőség közül) az határozza meg, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ úgynevezett jobbrendszert alkot. **Kifejtési tétel:** $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{bc})\mathbf{a}$.

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ **vegyes szorzata** $\mathbf{abc}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$. Ezt a számot úgy kapjuk, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ koordinátavektorát sorban beírjuk egy mátrix három sorába, és kiszámítjuk a determinánst. Ezért e három vektor pontosan akkor van egy síkban, ha (lineárisan összefüggenek, azaz) a vegyes szorzatuk nulla. Nyilván $\mathbf{abc}=\mathbf{bca}$, azaz $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (**felcserélési tétel**).

3. A fenti képletekkel számolva $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=[-1,-1,1]^T$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=1$, ugyanakkor $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{b}=-1$. Végül $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{bc})\mathbf{a}=[0,2,2]^T$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=[-41,57,-29]^T$.

10. $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle$; $\langle\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b}\rangle=\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{b}\rangle+\langle\mathbf{a}_2,\mathbf{b}\rangle$; ha λ skalár, akkor $\langle\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\lambda\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$, és ugyanezek a második változóban is. Végül $\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle\geq0$, és csak akkor nulla, ha $\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Ezek megegyeznek a geometriai vektorok skaláris szorzatának tulajdonságaival.