Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Tizenegyedik feladatsor — megoldások

Egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés **lineáris,** ha minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$-re

(1) **Összegtartó,** azaz $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$;

(2) **Skalárszoros-tartó,** azaz $\varphi(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\varphi(\mathbf{v})$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra.

A φ leképezés **magtere** azokból a vektorokból áll, amelyek képe a nullvektor, jele $\mathcal{K}er(\varphi)$, **képtere** az értékkészlete, vagyis azon $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ vektorok halmaza, amelyekhez van olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, hogy $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, jele $\mathcal{I}m(\varphi)$. A $\mathcal{K}er(\varphi)$ altér $\mathbb{R}^n$-ben, az $\mathcal{I}m(\varphi)$ altér $\mathbb{R}^m$-ben. A **dimenzióösszefüggés:** $\dim \mathcal{K}er(\varphi) + \dim \mathcal{I}m(\varphi) = n$ (ami a φ értelmezési tartományának dimenziója). A φ akkor lineáris **transzformáció,** ha $m = n$; akkor **izomorfizmus,** ha kölcsönösen egyértelmű. Utóbbi azzal ekvivalens, hogy $m = n$, $\mathcal{K}er(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$ és $\mathcal{I}m(\varphi) = \mathbb{R}^n$.

1. A φ_4 nem lineáris, mert nem skalárszoros-tartó. Például ha $\mathbf{v} = [1,1]^T$ (azaz a képletben $\alpha = \beta = 1$), akkor $\varphi_4(\mathbf{v}) = 1 \cdot 1 = 1$, vagyis $3\varphi_4(\mathbf{v}) = 3$. Ugyanakkor $3\mathbf{v} = [3,3]^T$, ezért $\varphi_4(3\mathbf{v}) = 3 \cdot 3 = 9$. Tehát $\varphi_4(3\mathbf{v}) \neq 3\varphi_4(\mathbf{v})$. Hasonló példa mutatja, hogy a φ_6 nem tartja a $\lambda = -1$-gyel való szorzást, és ezért nem lineáris. A többi leképezés lineáris, amit a fenti két tulajdonság ellenőrzésével igazolhatunk. Pl. φ_1 összegtartó, mert ha $\mathbf{u} = [\alpha, \beta]^T$ és $\mathbf{v} = [\gamma, \delta]^T$, akkor egyrészt $\varphi_1(\mathbf{u}) = \alpha + \beta$ és $\varphi_1(\mathbf{v}) = \gamma + \delta$, másrészt $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [\alpha+\gamma, \beta+\delta]^T$, ezért $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\alpha+\gamma) + (\beta+\delta)$. Ez tényleg egyenlő $\varphi_1(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{v}) = (\alpha+\beta) + (\gamma+\delta)$-val.

A $\mathcal{K}er(\varphi_1)$ azon $\mathbf{v} = [\alpha, \beta]^T$ vektorokból áll, amelyekre $0 = \varphi(\mathbf{v}) = \alpha + \beta$. Ezek az $[\alpha, -\alpha]^T = \alpha[1,-1]^T$ alakú vektorok. Ebben az altérben tehát bázist alkot az $[1,-1]^T$ vektor, és így $\dim \mathcal{K}er(\varphi_1) = 1$. A φ_1 képtere az egész $\mathbb{R}$. Valóban, ha $r \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbf{v} = [r, 0]^T$ esetén $\varphi_1(\mathbf{v}) = r + 0 = r$. Így $\dim \mathcal{I}m(\varphi_1) = 1$. Ezt leolvashattuk volna a dimenzióösszefüggésből is, ami azt mondja ebben az esetben, hogy $1+1 = 2$ (mert φ_1 az $\mathbb{R}^2$-en van értelmezve). A φ_1 nem lineáris transzformáció, mert $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}$, és nem is izomorfizmus, mert $\mathcal{K}er(\varphi_1) \neq \{\mathbf{0}\}$.

A φ_2 képtere az egész $\mathbb{R}^2$, ami 2-dimenziós, magtere a $[0, 0, \alpha_3]^T$ alakú vektorokból áll, ami 1-dimenziós. Nem transzformáció és nem is izomorfizmus. A φ_3 képtere azokból az $\mathbb{R}^3$-beli vektorokból áll, amelyek harmadik komponense nulla, ez 2-dimenziós. A magtere a $[0, 0, \alpha_3]^T$ alakú vektorokból áll, ami 1-dimenziós. Transzformáció, de nem izomorfizmus. Végül φ_5 transzformáció is, izomorfizmus is, képtere $\mathbb{R}^2$, magtere csak a nullvektorból áll.

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben és $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ bázis $\mathbb{R}^m$-ben, akkor a φ **mátrixa** ebben a bázispárban $[\varphi]^{\mathbf{b};\mathbf{c}}$ (illetve $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ esetén $[\varphi]^{\mathbf{b}}$) a következő:

$$[\varphi]^{\mathbf{b};\mathbf{c}} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(\mathbf{b}_1) & \varphi(\mathbf{b}_2) & \ldots & \varphi(\mathbf{b}_n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(\mathbf{b}_1) & = & \alpha_{11}\mathbf{c}_1 + \alpha_{21}\mathbf{c}_2 + \ldots + \alpha_{m1}\mathbf{c}_m \\ \varphi(\mathbf{b}_2) & = & \alpha_{12}\mathbf{c}_1 + \alpha_{22}\mathbf{c}_2 + \ldots + \alpha_{m2}\mathbf{c}_m \\ & \vdots & \\ \varphi(\mathbf{b}_n) & = & \alpha_{1n}\mathbf{c}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{c}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\mathbf{c}_m \end{array}$$

Vagyis ha egy oszlop minden α_{ij} elemét megszorozzuk a sorának a bal oldalán álló $\mathbf{c}_i$ vektorral, és ezeket összeadjuk, akkor az oszlop tetején álló $\varphi(\mathbf{b}_j)$ vektort kapjuk. A mátrix j-edik oszlopa tehát a $\varphi(\mathbf{b}_j)$ koordinátavektora a $\mathbf{c}$ bázisban, azaz $[\varphi(\mathbf{b}_j)]_{\mathbf{c}}$. Ha $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor, akkor $\varphi(\mathbf{v})$ koordinátáit a $\mathbf{c}$ bázisban úgy számíthatjuk ki, hogy $\mathbf{v}$-nek a $\mathbf{b}$ bázisban vett koordinátavektorát megszorozzuk balról φ mátrixával. Képletben: $[\varphi(\mathbf{v})]_{\mathbf{c}} = [\varphi]^{\mathbf{b};\mathbf{c}}[\mathbf{v}]_{\mathbf{b}}$.

5. Alkalmas $\mathbf{b};\mathbf{b}$ bázispárban felírjuk a transzformáció mátrixát, és ezzel számolunk.

2. ***(*)*** Ha $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, vagyis $\mathbf{v}$ koordinátavektora az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban $[\alpha, \beta, \gamma]^T$, akkor $\varphi(\mathbf{v})$ koordinátavektorát ugyanebben a bázisban úgy kapjuk, hogy a megadott mátrixokat jobbról megszorozzuk az $[\alpha, \beta, \gamma]^T$ vektorral. Az első mátrixnál az eredmény $[\alpha, \gamma, \beta]^T$ (az x-tengely fixen marad, az y-tengely helyet cserél a z-tengellyel), ami arra a síkra való tükrözés, amely az x-tengelyen áthalad, és felezi az y- és z-tengelyek által bezárt szöget. E sík egyenlete $y - z = 0$. A második mátrixnak az x-tengely körüli két 90 fokos forgatás közül az felel meg, amely $\mathbf{j}$-t $\mathbf{k}$-ba (és nem $-\mathbf{k}$-ba) viszi. Végül a harmadik transzformáció az $[1, 1, 1]^T$ koordinátájú vektor egyenese körüli két 120 fokos forgatás közül az, amelyre $\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$.

3. Ha α szöggel forgatunk az origó körül, akkor az $\mathbf{i}$ vektor képe $\cos(\alpha)\mathbf{i} + \sin(\alpha)\mathbf{j}$, a $\mathbf{j}$ képe $-\sin(\alpha)\mathbf{i} + \cos(\alpha)\mathbf{j}$ lesz (érdemes felrajzolni a megfelelő derékszögű háromszögeket). Ezért e forgatás mátrixa a lenti F lesz, aminek a) és c) speciális esete. A b) transzformációnál $\mathbf{i}$ helyben marad, $\mathbf{j}$ átmegy $-\mathbf{j}$-be, végül a d) esetben $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ helyet cserél. Az eredmények:

$$F = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{a): } \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b): } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{c): } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d): } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. A $[\varphi]^{\mathbf{e}'}$ mátrix első oszlopában azok az α és β számok vannak, melyekre $\varphi(\mathbf{e}'_1) = \alpha\mathbf{e}'_1 + \beta\mathbf{e}'_2$, azaz $\varphi(-3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2) = \alpha(-3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2) + \beta(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$. Mivel φ összegtartó és skalárszorostartó, ezért $\varphi(-3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2) = \varphi(-3\mathbf{e}_1) + \varphi(7\mathbf{e}_2) = -3\varphi(\mathbf{e}_1) + 7\varphi(\mathbf{e}_2)$. Tudjuk a $[\varphi]^{\mathbf{e}}$ első oszlopából, hogy $\varphi(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, a második oszlopból pedig, hogy $\varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$. Ezt behelyettesítve $\alpha(-3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2) + \beta(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = -3(2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) + 7(-\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)$, átrendezve $(-3\alpha + \beta + 13)\mathbf{e}_1 + (7\alpha - 2\beta + 36)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ függetlenek, mindkét együttható nulla. Az egyenletrendszert megoldva $\alpha = -62$ és $\beta = -199$. A másik oszlop is hasonlóan számolható, elemei 19 és 61. Ennél gyorsabb a bázistranszformáció képletét alkalmazni:

Bázistranszformáció. Legyen $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ és $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ két bázis, $\mathbf{c}_i = \alpha_{1i}\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_{ni}\mathbf{b}_n$, és az S mátrixban az i-edik sor j-edik eleme α_{ij}. Ekkor $[\varphi]^{\mathbf{c}} = S^{-1}[\varphi]^{\mathbf{c}}S$. A 4. példában

$$S = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \qquad [\varphi]^{\mathbf{e}'} = S^{-1}[\varphi]^{\mathbf{e}}S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -62 & 19 \\ -199 & 61 \end{bmatrix}.$$

8. Bázistranszformációval: $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, az eredmény $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Műveletek lineáris leképezésekkel. A $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések **összegét** a $(\varphi + \psi)(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{v})$ definiálja ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$). Mátrixa a φ és ψ mátrixainak összege (minden bázispárban). A φ λ **skalárszorosa** $(\lambda\varphi)(\mathbf{v}) = \lambda\big(\varphi(\mathbf{v})\big)$, mátrixa $[\lambda\varphi]^{\mathbf{b},\mathbf{c}} = \lambda[\varphi]^{\mathbf{b},\mathbf{c}}$. Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $\theta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, akkor **szorzatuk** (kompozíciójuk) az a $\varphi\theta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, melynél $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ képe $\varphi\big(\theta(\mathbf{v})\big)$. A mátrixok összeszorzódnak: $[\varphi\theta]^{\mathbf{b},\mathbf{c}} = [\varphi]^{\mathbf{a},\mathbf{c}}[\theta]^{\mathbf{a},\mathbf{b}}$.

6. Ha $\mathbf{v} = [\alpha, \beta]^T$, akkor $\xi_1(\mathbf{v}) = [\alpha, -\beta]^T$ és $\eta_1(\mathbf{v}) = [-\alpha, \beta]^T$, így $(\xi_1 + \eta_1)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, azaz $\xi_1 + \eta_1$ a nulla leképezés, mert $[\alpha, -\beta]^T + [-\alpha, \beta]^T = [0, 0]^T$. Hasonló meggondolás mutatja, hogy $\xi_2 + \eta_2$ a helybenhagyás (identitás), mert $\xi_2(\mathbf{v}) = [\alpha, 0]^T$ és $\eta_2(\mathbf{v}) = [0, \beta]^T$. Az eredményt úgy is megkaphatjuk, hogy a leképezések mátrixait adjuk össze.

7. A mátrixok $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, a szorzat $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ami $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ körüli 120°-os forgatás. Ha a másik irányba forgatunk, vagy fordítva szorzunk, akkor a tengely változik.