Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Tizedik feladatsor — megoldások

Skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött. Ez egy kétváltozós, valós/komplex értékű függvény, melyre

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}; \qquad \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle; \quad \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle;$$
$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}\rangle; \qquad \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_2\rangle;$$

továbbá $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ (valós és) pozitív. Az $\mathbf{x}$ normája (hossza) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$. Ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor tehát $(1/\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}$ egységvektor (normája 1), ami $\mathbf{x}$-szel párhuzamos, ez az $\mathbf{x}$ (le)**normáltja.** **Háromszög-egyenlőtlenség:** $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. **Cauchy-egyenlőtlenség:** $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. A nem nulla $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok 0 és 180 fok közötti $\gamma = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ szögét valós fölött a $\cos\gamma \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ képlet segítségével definiáljuk.

Főpélda: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{y}^*\mathbf{x}$, ahol $\mathbf{y}^*$ az $\mathbf{y}$ transzponáltjának (komponensenkénti) konjugáltja. Azaz ha $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ és $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T$, akkor $\mathbf{y}^*\mathbf{x} = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$.

1. Az *a)*-beli függvény nem skaláris szorzat, például $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ nem teljesül, ha $\mathbf{x} = \mathbf{y} = [1, 1]^T$ és $\lambda = 2$. A *b)*-ben skaláris szorzatot kapunk, ezt úgy igazolhatjuk, hogy a fenti tulajdonságokat ellenőrizzük. Például az utolsóé: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 2x_1^2 + 3x_2^2 > 0$, kivéve ha $x_1 = x_2 = 0$, hiszen nem nulla valós szám négyzete pozitív. A *c)* esetben $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 2x_1x_2$, ami lehet negatív is, pl. ha $\mathbf{x} = [1, -1]^T$, tehát ez nem skaláris szorzat. A *d)*-ben viszont azt kapunk, az utolsó tulajdonság bizonyítása: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0$, kivéve ha $x_1 = x_1 + x_2 = 0$, azaz amikor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. *a):* $(\cos\gamma)\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2}\sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2 + 1^2} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1$, ahonnan az adódik, hogy $\cos\gamma = 1/\sqrt{2}$, azaz $\gamma = 45°$. **b):** $\cos\gamma = 1/2$, így $\gamma = 60°$.

3. Ha $\mathbf{b} = [x, y, u, v]^T$ a keresett vektor, akkor a megadott három vektorral vett skaláris szorzata nulla, azaz $2x + y + u + 3v = x + y + u + v = x - y - u + v = 0$, ami homogén lineáris egyenletrendszer a $\mathbf{b}$ komponenseire. Például Gauss-eliminációval az általános megoldás $(x, y, u, v) = (0, -u, u, 0)$. Ekkor $1 = \|\mathbf{b}\| = 2u^2$, azaz pl. $[0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0]^T$ megfelelő.

6. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \overline{(1 - i)} \cdot (1 - i) + \overline{i} \cdot 1 + \overline{2} \cdot i = 2 + i$ és $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{|1 - i|^2 + |1|^2 + |i|^2} = 2$. A $\mathbf{c}$ skaláris szorzata $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel nulla, így $3 \cdot \overline{(1 - i)} + y \cdot \overline{1} + z \cdot \overline{i} = 3 \cdot \overline{(1 - i)} + y \cdot \overline{i} + z \cdot \overline{2} = 0$. A lineáris egyenletrendszert megoldva $y = -1 - 3i$ és $z = -2i$.

7. Tudjuk, hogy $0 = \langle \mathbf{x} - i\mathbf{y}, i\mathbf{x} + \mathbf{y}\rangle = \overline{i}\langle \mathbf{x} - i\mathbf{y}, \mathbf{x} - i\mathbf{y}\rangle$, hiszen $i\mathbf{x} + \mathbf{y} = i(\mathbf{x} - i\mathbf{y})$. Azaz $\|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2 = 0$, tehát $\mathbf{x} - i\mathbf{y} = 0$. Ezért $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ tényleg lineárisan összefüggő.

8. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$. A hasonló számolást $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$-re is elvégezve azonosságot kapunk. (Az állítás azt a geometriai tényt fejezi ki, hogy a parallelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.)

Az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ **ortonormált bázis**, röviden ONB, ha elemei páronként merőlegesek, és hosszuk 1. Ortonormált bázist a **(Gram-)Schmidt eljárással** készíthetünk tetszőleges $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ bázisból kiindulva. Legyen $\mathbf{f}_1 = (1/\|\mathbf{b}_1\|)\mathbf{b}_1$ (a $\mathbf{b}_1$ normáltja). Ha $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ már megvan, $\mathbf{f}_{k+1}$-et a következőképpen kapjuk. A $\mathbf{b}_{k+1}$ vektor $\mathbf{f}_i$ irányú vetületének hossza $\langle \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{f}_i\rangle$, ezért $\mathbf{f} = \mathbf{b}_{k+1} - \langle \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{f}_1\rangle\mathbf{f}_1 - \ldots - \langle \mathbf{b}_{k+1}, \mathbf{f}_k\rangle\mathbf{f}_k$ már merőleges mindegyik $\mathbf{f}_i$-re. Legyen $\mathbf{f}_{k+1}$ a $\mathbf{f}$ normáltja. Így $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = \mathrm{Span}(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ is igaz minden k-ra.

5. Az első lépésben $\mathbf{f}_1 = (1/2)[1,1,1,1]^T$ a $\mathbf{b}_1$ normáltja. Mivel $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{f}_1\rangle = 3/2$, ezért $\mathbf{f}_2$ a $\mathbf{b}_2 - (3/2)\mathbf{f}_1 = (1/4)[-3,1,1,1]^T$ vektor normáltja, azaz $\big(1/(2\sqrt{3})\big)[-3,1,1,1]^T$. A képlettel hasonlóan tovább számolva $\mathbf{f}_3 = (1/\sqrt{6})[0,-2,1,1]^T$ és $\mathbf{f}_4 = (1/\sqrt{2})[0,0,-1,1]^T$.

Egy szimmetrikus, valós A mátrix sajátértékei mindig valósak, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek. Az A-hoz tartozó **kvadratikus alak** $Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T A\mathbf{u}$. Abban az esetben ha $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ és $\mathbf{u} = [x,y]^T$, akkor $Q(\mathbf{u}) = ax^2 + 2bxy + dy^2$. A kvadratikus alak jellege (karaktere, definitsége) azt mondja meg, milyen valós értékeket vesz föl a nem nulla vektorokon. Ezt a tulajdonságot le tudjuk olvasni a mátrix sajátértékeiből:

$Q(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$	sajátértékek előjele:	jelleg:
mindig pozitív	mind pozitív	pozitív definit
mindig negatív	mind negatív	negatív definit
mindig nemnegatív	mind nemnegatív	pozitív szemidefinit
mindig nempozitív	mind nempozitív	negatív szemidefinit
van pozitív is, negatív is	van pozitív is, negatív is	indefinit

Ha $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ a triviális bázis i-edik vektora, akkor $Q(\mathbf{u})$ az A mátrix főátlójának i-edik eleme. Ha pl. a főátlóban van pozitív és negatív szám is, akkor a kvadratikus alak pozitív és negatív értékeket is fölvesz, tehát indefinit. Legyen $\Delta_0 = 1$ és Δ_k a mátrix bal fölső sarkában lévő $k \times k$-as részmátrix determinánsa (ez az ún. **karakterisztikus sorozat**). A kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha minden $\Delta_i > 0$, és pontosan akkor negatív definit, ha a Δ_i sorozat jelváltó, azaz a páratlan indexű tagok negatívak, a többi pozitív.

4. Mivel a mátrix szimmetrikus, a sajátvektorokat normálva ortonormált bázist kapunk, kivéve, ha valamelyik sajátaltér legalább kétdimenziós; ilyenkor ezekben az alterekben kell ortonormált bázist keresni. Erre általános esetben a Schmidt-eljárás szolgál.

(1) $\lambda = 1$-hez $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]^T$, $\lambda = 3$-hoz $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$, pozitív definit.
(2) $\lambda = 1$-hez $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$, $\lambda = -1$-hez $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]^T$, indefinit.
(3) A $\lambda = -1$-hez kétdimenziós sajátaltér tartozik: az egész $\mathbb{R}^2$, ebben bármelyik ortonormált bázis jó, pl. a triviális $\mathbf{e}_1 = [1,0]^T$ és $\mathbf{e}_2 = [0,1]^T$.
(4) A sajátértékek $\pm\sqrt{2}$, a bázis elemei $\big(1/\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}\big)[1 \pm \sqrt{2}, 1]^T$, indefinit.
(5) A sajátértékek $\big(-3 \pm \sqrt{41}\big)/2$, a bázis $\big(1/\sqrt{82 \pm 10\sqrt{41}}\big)[5 \pm \sqrt{41}, 4]^T$, indefinit.
(6) $\lambda = -1$-hez $(1/\sqrt{2})[1,0,-1]^T$. A $\lambda = 1$ sajátértékhez kétdimenziós sajátaltér tartozik, ami az $[x,y,x]^T$ alakú vektorokból áll. Ebben a Schmidt-eljárás nélkül is találhatunk merőleges egységvektorokat, pl. $[0,1,0]^T$ és $(1/\sqrt{2})[1,0,1]^T$. Indefinit.
(7) A sajátértékek 2 és -2, a bázis ugyanaz, mint az előző mátrixnál. Indefinit.
(8) $\lambda = 0$, a triviális $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bázis megfelelő, pozitív és negatív szemidefinit is.
(9) A sajátértékek 0 és 1, a triviális bázis megfelelő, indefinit.
(10) $\lambda = 1$, a triviális bázis megfelelő, pozitív definit.

9. Mindhárom zártsági feltétel következik a skaláris szorzat tulajdonságaiból. Például ha $\mathbf{v} \in V$, akkor $\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle = 0$. De ekkor $\lambda\mathbf{v} \in V$ is teljesül, mert $\langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle = 0$.

10. Ha $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n$, akkor jobbról $\mathbf{e}_j$-vel skalárisan szorozva, és felhasználva, hogy $i \neq j$ esetén $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = 0$, továbbá, hogy $\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j\rangle = 1$ azt kapjuk, hogy $\lambda_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_j\rangle$, ami az első képletet igazolja. Hasonlóan $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{y}, \mathbf{e}_j\rangle\mathbf{e}_j$. Az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$-ba ezeket behelyettesítve és kibontva a második azonosságot kapjuk, aminek a harmadik speciális esete, amikor $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.