Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Első mintazárthelyi — eredmények és pontozás

1. Gauss-eliminációval számolva

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 10 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & -10 & -14 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/5 & 0 & 6/5 \\ 0 & -3/10 & 1 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Az y a szabad változó, az első sorból $x = (2/5)y + (6/5)$, a második sorból $z = (3/10)y + (7/5)$, ezért az általános megoldás egy alakja $(x, y, z) = \big((2/5)y + (6/5), y, (3/10)y + (7/5)\big)$. Ha valaki másodjára az y oszlopában karikázott, az eredmény $\big((4/3)z - (2/3), (10/3)z - (14/3), z\big)$.

2. Gauss-eliminációval számolva

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{array}\right] \quad \text{(2 pont).}$$

Van tilos sor, ezért $\mathbf{d} \notin U$ (1 pont). Mivel az első két oszlopban van vezéregyes (karika), ezért U-ban bázist alkot $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ (2 pont). Ez a bázis kételemű, ezért $\dim(U) = 2$ (1 pont).

3. Az M oszlopai függetlenek (az eliminációt elvégezve az egységmátrixot kapjuk), ezért rangja 3 (1 pont). A négyzetre emelést és az invertálást (Gauss-eliminációval) elvégezve az eredmény

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (2 pont);} \qquad (M^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (3 pont).}$$

Az invertálás lépései:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4. Az (1) nem altér (1 pont), mert pl. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eleme, de $2\mathbf{a}$ nem (2 pont). A (2) altér (indoklás nélkül is 1 pont), ami $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$ számszorosaiból áll, ezért $\mathbf{b}$ bázist alkot (2 pont).

5. Legyen $U = \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ és $W = \mathrm{Span}(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - 2\mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a})$. Azt kell megmutatni, hogy U generátorai benne vannak W-ben, és fordítva, W generátorai benne vannak U-ban. Utóbbi nyilvánvaló, hiszen $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ és $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ is lineáris kombinációja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-nek (2 pont). Megfordítva, $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - 2\mathbf{c}) - (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = -3\mathbf{c}$, ezért $(-1/3)(-3\mathbf{c}) = \mathbf{c} \in W$ (2 pont). Ezért $\mathbf{a} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) - \mathbf{c} \in W$ (1 pont), végül $\mathbf{b} = \mathbf{a} - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \in W$ (1 pont).

6. $3\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \in U$, ezért $(1/3)(3\mathbf{a}_1) \in U$ (1 pont). Ekkor $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_1 \in U$ (1 pont). Álljon U azokból a vektorokból, melyeknek az utolsó, negyedik koordinátája nulla (1 pont), továbbá legyen $\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{b}_1$. Ekkor $2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} \in U$ és $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = 3\mathbf{b}_1$ nem lesz az U-ban, ha $\mathbf{b}_1$ utolsó komponense nem nulla (3 pont). Azaz $\mathbf{b}_1 = [0, 0, 0, 1]^T$ és $\mathbf{b}_2 = [0, 0, 0, 2]^T$ megfelelő.