Bsc algebra1 normál gyakorlat

Első zárthelyi B (2016. október 28.) — eredmények és pontozás

1. Legyen $v = (x, y, z)^T$. A lineáris egyenletrendszer általános megoldása $(x, y, z) = (6z, 8 - 8z, z)$ (4 pont). Így $z \geq 0$ és $8-8z \geq 0$, azaz $z \leq 1$, a két megoldás $v = (6, 0, 1)^T$ és $v = (0, 8, 0)^T$ (2 pont).

2. Mivel $\varepsilon = (\sqrt{3} - i)/2 = \cos(-30°) + i\sin(-30°)$ (1 pont), ezért rendje 12 (1 pont). A hatodik gyökök hossza 1, szöge rendre 355°, 295°, 235°, 175°, 115°, 55°, mindegyiknek 72 a rendje (4 pont).

Második megoldás: Mint az előző megoldásban, $o(\varepsilon) = 12$ (2 pont). Ha $\eta^6 = \varepsilon$, akkor legyen $n = o(\eta)$. A hatvány rendjének képlete miatt $12 = o(\eta^6) = n/(n, 6)$ (1 pont). Innen $12 \mid n$ (1 pont), de akkor $(n, 6) = 6$, és ezért $n = 72$ (2 pont). (Nem kellett felsorolni a hatodik gyököket.)

3. A racionális gyökteszt miatt a lehetséges gyökök ± 1 és $\pm 1/2$, ezek közül a pozitívak kizárhatók, mert $c, d > 0$ (2 pont). Ha a -1 a többszörös gyök, akkor behelyettesítve $-2 + c - d + 1 = 0$, azaz $c = d+1$ (1 pont). Hornerrel kiemelve az $x+1$-et a kapott polinom $2x^2+(d-1)x+1$. Ennek is gyöke a -1, ezért $d = 4$ és akkor $c = 5$ (1 pont), az eredeti polinom ebben az esetben $(x+1)^2(2x+1)$. Ha a $-1/2$ a többszörös gyök, akkor ezt behelyettesítve $c = 2d-3$ adódik (1 pont). Hornerrel kiemelve $x-(1/2)$-et $2x^2+(2d-4)x+2$ adódik. Ennek is gyöke a $-1/2$, behelyettesítve $d = 9/2$-et kapunk, ami azonban nem egész, ezért ilyen megoldás nincs (1 pont).

4. Legyen $z = x + iy$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, az r szám pedig egy valós gyök. Ekkor $r^2 + ir - i(x + iy)$ valós része $r^2 + y = 0$, képzetes része $r - x = 0$ (3 pont). Tehát $x = r$ és így $y = -x^2$ (1 pont). Megfordítva, ha $y = -x^2$, akkor az egyenletnek gyöke az x (1 pont). A helyes ábra tehát az $y = -x^2$ függvény grafikonja (1 pont).

5. Belátjuk, hogy $f(x) - 3$-nak maximum egy egész gyöke lehet. Ha $f(x) = x$, akkor $f(x) - 3$-nak egy gyöke van, és felveszi az 1 és 2 értékeket is (1 pont). Megmutatjuk, hogy nem lehet két egész gyöke $f(x)-3$-nak. Tegyük fel indirekt, hogy $c < d$ egész gyökei. Ekkor $f(x)-3 = (x-c)(x-d)g(x)$, ahol $g \in \mathbb{Z}[x]$ (2 pont). Ezért $2 = f(b) = (b - c)(b - d)g(b) + 3$, vagyis $b - c$ és $b - d$ egyike 1, a másik -1 (1 pont). Ezért $c = b - 1$ és $d = b + 1$. Hasonlóan a-t helyettesítve azt kapjuk, hogy $a - c = (a - b) + 1$ és $a - d = (a - b) - 1$ is osztója 2-nek (1 pont). A 2 osztói ± 1 és ± 2, e számok között pedig csak 1 és -1 különbsége 2. Ezért $(a - b) - 1 = -1$, azaz $a = b$, de ez lehetetlen, mert $f(a) = 1$ és $f(b) = 2$ (1 pont).

6. A feladat feltételeinek a 8-cal oszható n számok felelnek meg. Ennek belátásához legyen ε rendje n, szöge pedig 2π-nek k/n-szerese, ahol tehát $(k, n) = 1$. A $-i$ szöge $-\pi/2$, ezért $-i\varepsilon$ szöge 2π-nek $(k/n) - (1/4) = (4k - n)/(4n)$-szerese (2 pont). Azokat az n-eket keressük, melyek esetében minden k-ra e tört nevezője egyszerűsítés után n. Ha $k = 1$, akkor $4n \mid 4 - n$, ezért $4 \mid n$ (1 pont). Legyen $n = 4m$. Ha m páratlan lenne akkor a $(4 - n)/(4n) = (1 - m)/n$ tört még egyszerűsíthető lenne 2-vel, ezért a nevező az egyszerűsítés után nem lehetne n. Ezért m páros, azaz $8 \mid n$ (1 pont). Meg kell még mutatni, hogy ha $8 \mid n$, azaz ha m páros, akkor $k - m$ (a számláló) relatív prím n-hez. Mivel $(k, n) = 1$, ezért k páratlan, így $k - m$ is az, tehát a tört 2-vel nem egyszerűsíthető (1 pont). Nem egyszerűsíthető egy páratlan p prímmel sem, mert ha $p \mid n = 4m$, akkor $p \mid m$, és ha $p \mid k - m$, akkor $p \mid k$ lenne, ami a $(k, n) = 1$ feltételnek ellentmond (1 pont).

Második megoldás: Ha $-i\varepsilon$ rendje is n, akkor $1 = (-i\varepsilon)^n = (-i)^n\varepsilon^n = (-i)^n$, tehát $(-i)^n = 1$, és így $n = 4m$ alakú (1 pont). Ekkor $o(\varepsilon^m) = n/(n, m) = 4m/m = 4$, vagyis $\varepsilon^m = \pm i$. Mivel $-i\varepsilon$ rendje $n = 4m$, így $2m < 4m$ miatt $(-i\varepsilon)^{2m} \neq 1$. De $(-i\varepsilon)^{2m} = (-i)^{2m}(\pm i)^2 = -(-1)^m = (-1)^{m+1}$. Ez azt jelenti, hogy m páros szám, vagyis $8 \mid n$ (2 pont). Megfordítva, tegyük fel, hogy $8 \mid n$ azaz $2 \mid m$. Ekkor $(-i\varepsilon)^n = ((-i)^4)^m\varepsilon^n = 1$, ezért n jó kitevője $-i\varepsilon$-nak, azaz ha $o(-i\varepsilon) = d$, akkor $d \mid n$ (1 pont). Továbbá $1 = (-i\varepsilon)^{4d} = (-i)^{4d}\varepsilon^{4d} = \varepsilon^{4d}$, ezért $n \mid 4d$. Ha tehát $n = td$, akkor $t \mid 4$, és így d értéke $n = 4m$, $n/2 = 2m$ vagy $n/4 = m$ lehet csak (1 pont). Viszont m páros, ezért $(-i\varepsilon)^{2m} = (-1)^m\varepsilon^{2m} = \varepsilon^{2m} \neq 1$, hiszen ε rendje $n > 2m$. Ezért $2m$, és így m sem jó kitevője $-i\varepsilon$-nak. Tehát $o(-i\varepsilon) = 4m = n$ (1 pont).