Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Hatodik feladatsor — megoldások

Emlékeztető. Egy mátrix **oszloprangja** az oszlopaiból álló vektorrendszer, **sorrangja** a soraiból álló vektorrendszer rangja. Tétel, hogy *ez a két rang minden A mátrixra ugyanaz a szám,* ez a mátrix rangja, jele $\rho(A)$. A tétel úgy is fogalmazható, hogy A és A^T rangja megegyezik. **A rang a Gauss-eliminációnál kapott vezéregyesek száma,** a műveleteket a sorokkal és az oszlopokkal is végezhetjük, akár vegyesen is. Két nevezetes egyenlőtlenség:

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B) \qquad \rho(AB) \leq \rho(A) \text{ és } \rho(AB) \leq \rho(B)\,.$$

1. Nincs 3 rangú 2×3-as mátrix, a rang legfeljebb annyi lehet mint a sorok, illetve az oszlopok száma. Az alábbi mátrixok rangja rendre 0, 1, 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. A fenti összefoglalóból látszik, hogy b) és d) igaz. A másik kettő hamis, az ellenpéldák:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az a) esetben $\rho(AB) = 1$ és $\rho(BA) = 0$. A c) esetben $\rho(A-B) = 2$ és $\rho(A) - \rho(B) = 0$.

Ha AB a (megfelelő méretű) egységmátrix, akkor A **balinverze** B-nek és B **jobbinverze** A-nak. Egy $k \times n$-es A mátrixnak pontosan akkor van balinverze, ha rangja n, és pontosan akkor van jobbinverze, ha rangja k. Ha mindkettő fennáll, akkor A szükségképpen $n \times n$-es, azaz négyzetes. Egy négyzetes A mátrixnak tehát pontosan akkor van balinverze, ha van jobbinverze. Tétel, hogy ezek minden esetben egyenlők, ezt (kétoldali) **inverznek** nevezzük, és A^{-1}-gyel jelöljük. Kétszer kettes mátrix inverzét a következő képlet szolgáltatja:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ ha } ad - bc \neq 0.$$

Ha $ad - bc = 0$, akkor a mátrixnak nincs inverze. Memoriter: a mátrixban *főátló cserél, mellékátló mínuszoz, osztunk $ad-bc$-vel* (minden elemet). (Ez az 5. feladat.)

Általános négyzetes A mátrix inverzét Gauss-eliminációval számíthatjuk ki. Az A mellé jobbra odamásoljuk az ugyanakkora egységmátrixot, és közéjük vonalat húzunk. Karikázni csak a vonaltól balra szabad, a szokásos szabályok szerint, a műveleteket a teljes sorokkal végezzük. *Ha keletkezik olyan sor, aminek a bal fele csupa nulla, akkor a mátrix nem invertálható.* Ha nem, akkor az eljárás végén a bal oldalon minden sorban és minden oszlopban pontosan egy karika lesz. A sorok cserélgetésével a bal oldalból tehát egységmátrixot tudunk csinálni. *Ekkor a jobb oldalon megjelenő mátrix A^{-1}.* Ellenőrzés: $AA^{-1} \stackrel{?}{=} I_n$.

4. Az M_1 mátrix esetében az eliminációs invertálás, valamint az eredmények a következők.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 10 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. A b) mátrixnak két sora van, ezért rangja legfeljebb 2 lehet. Balinverze akkor lenne, ha a rangja az oszlopok száma, azaz 3 lenne, ami lehetetlen. Az a) esetben lesz megoldás, mert a két sor független (egyik sem számszorosa a másiknak). Az ismeretlen X mátrix elemeire lineáris egyenletrendszert kapunk. Itt van az, ami az első oszlopra vonatkozik.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & * \\ y & * \\ z & * \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{azaz} \quad \begin{aligned} x + 2\,y + 4\,z &= 1 \\ 3\,x + 5\,y + 6\,z &= 0 \end{aligned}$$

Ennek megoldása például $x = -5$, $y = 3$, $z = 0$ (nem egyértelmű a megoldás). Az X második oszlopára vonatkozó egyenletrendszer bal oldala ugyanaz, csak a jobb oldala nem. Egy lehetséges jobbinverz $X = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ (tipográfiai okokból szerepel transzponált).

A c) eset is lineáris egyenletrendszerre vezet. Másik megoldás, hogy az egyenletet beszorozzuk jobbról a bal oldalán látható mátrix inverzével, amit a fenti képletből kapunk:

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Diagonális mátrix: olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlóján (azaz a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba vezető átlón) kívül minden szám nulla. **Felső háromszögmátrix:** négyzetes, a főátló alatt csupa nulla van. **Alsó háromszögmátrix:** négyzetes, a főátló fölött csupa nulla van. **Szimmetrikus mátrix:** (négyzetes és) a főátlójára szimmetrikus, azaz megegyezik a transzponáltjával. **Antiszimmetrikus mátrix:** (négyzetes és) a főátlójára szimmetrikus elemek egymás ellentettjei, azaz megegyezik a transzponáltjának ellentettjével. Speciálisan a főátló elemei végig nullával egyenlők. **Projektor mátrix:** négyzetes, a négyzete önmaga. **Nilpotens mátrix:** négyzetes, valamelyik hatványa a nullmátrix.

6. Az M_7 nem is mátrix. Diagonális: 5, 6, 11. Háromszögmátrix: 1, 5, 6, 10, 11. Szimmetrikus: 2, 3, 4, 5, 6, 11, 14. Antiszimmetrikus: 5, 8. Projektor: 5, 6, 11, 12. Nilpotens (elég a mátrix méretéig ellenőrizni a hatványokat): 5, 13. Invertálható: 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 14.

7. ***(*)*** Inverznek megfelel $I_n - A$, mert $(I_n + A)(I_n - A) = I_n^2 - I_nA + AI_n - A^2 = I_n$. (Mivel négyzetes a mátrix, azt már nem kell ellenőrizni, hogy $(I_n - A)(I_n + A) = I_n$.)

8. A nullamátrix rangja 0 (de az is felírható így). Ezért a mátrixnak van egy nem nulla oszlopa, legyen ez $\mathbf{b}$. Mivel az oszlopokból álló rendszer rangja 1, ezért bármely két oszlop összefügg, azaz mindegyik oszlop a $\mathbf{b}$ skalárszorosa. Legyen az i-edik oszlop $\lambda_i\mathbf{b}$. Ekkor a mátrix könnyen ellenőrizhetően $\mathbf{b} \cdot [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$-nel egyenlő.

9. ***(*)*** Egy 3×2-es mátrix és egy 2×3-as mátrix szorzata a sorrendtől függően 2×2-es vagy 3×3-as lesz, de mindenképpen legfeljebb 2 a rangja. Ezért $M_1, \ldots, M_{14}$ közül csak ezek maradnak: 5, 6, 12, 13, 14. Az M_5 két nullamátrix szorzata, az M_6 előáll úgy, hogy M^TM, ahol $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Végül tetszőleges kétszer kettes mátrix előáll így:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

A 8. feladat megoldásához hasonlóan meggondolható, hogy minden 3×3-as, legfeljebb 2 rangú mátrix előáll egy 3×2-es és egy 2×3-as mátrix szorzataként.