**Proginfo lineáris algebra gyakorlat**

*Ötödik feladatsor — megoldások*

**Mátrixműveletek.** Egy mátrixot úgy **szorzunk egy $\lambda$ skalárral**, hogy minden elemét megszorozzuk $\lambda$-val. Az $A$ és $B$ mátrixokat akkor lehet **összeadni**, ha ugyanannyi soruk van és ugyanannyi oszlopuk van (azaz mindkettő $k \times n$-es). Az összeadásnál az ugyanazon helyen álló elemeket adjuk össze (azaz ha $A$-ban és $B$-ben az $i$-edik sor $j$-edik eleme $a_{ij}$, illetve $b_{ij}$, akkor $A+B$-ben az $i$-edik sor $j$-edik eleme $a_{ij}+b_{ij}$). Az $A$ mátrix $A^T$ **transzponáltját** úgy kapjuk, hogy $A$ sorait $A^T$ oszlopaiba másoljuk (ez ugyanaz, mint ha $A$ oszlopait másolnánk $A^T$ soraiba). Ezért egy $k \times n$-es mátrix transzponáltja $n \times k$-as lesz. Fontos azonosságok: $(A^T)^T = A$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, végül $(A+B)^T = A^T + B^T$ (ha $A+B$ elvégezhető). **Példa:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2a & 2+2c & 3+2e \\ 4+2b & 5+2d & 6+2f \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

**Sort oszloppal úgy szorzunk**, hogy a megfelelő elemeket egymással megszorozzuk, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, az eredmény tehát egy szám (lásd a lenti képletet). Ez a művelet akkor értelmes, ha a sornak és az oszlopnak ugyanannyi komponense van. Az $AB$ **mátrixszorzat** akkor definiált, ha $A$ ugyanolyan széles, mint amilyen magas a $B$. A szorzásnál az $A$ mátrix $i$-edik sorát megszorozzuk a $B$ mátrix $j$-edik oszlopával (a sor-oszlop szorzás szabálya szerint), és a kapott szám lesz $AB$-ben az $i$-edik sor $j$-edik eleme. Ezért egy $k \times n$-es és egy $n \times m$-es mátrix szorzata $k \times m$-es. Érdemes a $B$-t az $A$-tól jobbra fölfelé írni, az $AB$ eredményt pedig az $A$ mellé jobbra, hogy a szorzat $i$-edik sorának $j$-edik eleme az $A$ mátrix $i$-edik sorának és a $B$ mátrix $j$-edik oszlopának meghosszabbításába essen:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2a+3b & 2c+3d & 2e+3f \\ 4a+5b & 4c+5f & 4e+5f \end{bmatrix} \end{array}$$

Hasznos azonosság, hogy ha $AB$ elvégezhető, akkor $(AB)^T = B^T A^T$ (megfordul a sorrend).

Az $n \times n$-es $I_n$ **egységmátrixban** a **főátló** (vagyis a bal felső sarokból induló átló) csupa 1-esből áll, a többi elem pedig nulla. Bármely $n \times n$-es $A$ mátrixra $AI_n = I_nA = A$.

Egy $A$ mátrix $\rho(A)$ **rangja** az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Tétel, hogy ez ugyanaz a szám, mint a sorokból álló vektorrendszer rangja. Amikor a rangot kiszámítjuk, akkor a Gauss-eliminációs műveleteket sorokkal és oszlopokkal is végezhetjük, vegyesen is.

**1.** Az értelmezett műveletek eredményei a következők.

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 19 & 92 \end{bmatrix}, \ 2A + B^T = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -36 & 3 & 27 \end{bmatrix}, \ AC = \begin{bmatrix} -7 & 14 & 1 \\ -4 & 19 & 15 \end{bmatrix}, \ AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 19 & 50 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -38 & -249 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 100 \end{bmatrix}, \quad C^2 = \begin{bmatrix} 10 & -9 & -11 \\ -1 & 10 & -9 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad CC^T = \begin{bmatrix} 14 & 1 & -5 \\ 1 & 14 & -7 \\ -5 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

**2.** Ez nehezebb feladat. Az utolsó három mátrixnál érdemes kis pozitív $n$ egészekre kiszámolni, megsejteni az általános eredményt, és utána $n$ szerinti teljes indukcióval bebizonyítani. A másodiknál a $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ és $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságokat használtuk.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{b)} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \ \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{d)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (n \ge 2) \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

**3.** Ha $A$ és $B$ **felcserélhető**, azaz $AB = BA$, akkor a szokásos algebrai azonosságok működnek $A$-ra és $B$-re, de általában nem. Például $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - A^2$, ami pont akkor egyenlő $A^2 - B^2$-tel, ha $-AB + BA = \mathbf{0}$. Hasonlóan, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, ami pontosan akkor egyenlő $A^2 + 2AB + B^2$-tel, ha $AB = BA$. Az $(AB)^T = B^T A^T$ azonosságot felhasználva láthatjuk, hogy ha például $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A^T$, akkor ez ellenpélda az a), c), d)-re, b) viszont igaz, mert $I_n$ felcserélhető $A$-val: $I_n A = A = AI_n$.

**4.** Gauss-eliminációval $\rho(A) = \rho(AA^T) = \rho(A^T A) = 2$. A $B$ és $C$ első három oszlopa ugyanaz, mint $A$ három oszlopa. A $B$ rangja is 2, mert az utolsó oszlop az első kettő összege, és így $A$-hoz képest nem nő meg a rangja. A $C$ rangjára Gauss-eliminációval 3 adódik, és ebből látjuk, hogy $C$ utolsó oszlopa nem lineáris kombinációja az első három oszlopának.

Ha $a = b = c = 0$, akkor $\rho(D) = 0$. Ha nem, akkor $D$ rangja 2. Valóban, a három oszlop összefügg, mert az első $c$-szeresét, a második $b$-szeresét és a harmadik $a$-szorosát összeadva a nullvektort kapjuk, és ez nemtriviális lineáris kombináció. Viszont két független oszlop mindig van. Ha pl. $a \neq 0$, akkor az első két oszlop közül egyik sem skalárszorosa a másiknak.

**5.** Az 1. feladat eredményei közül $AA^T$ és $CC^T$ lesz szimmetrikus. Az $(AB)^T = B^T A^T$ és $(A^T)^T = A$ azonosságokból $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, azaz $AA^T$ szimmetrikus. A szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak. Valóban, a nullmátrix nyilván szimmetrikus. Ha $A$ és $B$ szimmetrikus, akkor $A^T = A$ és $B^T = B$, ezért $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$, azaz $A + B$ is szimmetrikus, továbbá $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$, azaz $\lambda A$ is szimmetrikus. Így a szimmetrikus mátrixok halmaza zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra. Ennek az altérnek a dimenziója $n(n+1)/2$. A bázis keresésését $n = 2$-re mutatjuk be.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A jobb oldalon szereplő három mátrix bázist alkot. Generátorrendszerről van szó, hiszen tetszőleges $A$ szimmetrikus mátrixot felírtunk e három mátrix lineáris kombinációjaként. Függetlenek, mert ha a fenti képlet jobb oldala nulla, akkor $A = \mathbf{0}$, így $a = b = d = 0$. Általában a bázis $n$ mátrixában lesz egy darab 1-es és $n(n-1)/2$ mátrixban két darab 1-es.

**6.** ***(**)*** Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ rendszerből kiválasztható a $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ altér egy $C$ bázisa, melynek elemszáma $k = r(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Hasonlóan kiválasztható $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$-ből $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ egy $m = r(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ elemű $D$ bázisa. Kiszámolható, hogy az a legfeljebb $k+m$ darab $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$ vektor, ahol $\mathbf{a}_i \in C$ vagy $\mathbf{b}_i \in D$, generátorrendszert alkot $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$-ben. Így tartalmaz (legfeljebb $k + m$ elemű) bázist, melynek elemszáma $r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$. Ebből következik, hogy tetszőleges két összeadható mátrixra $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

**7.** $AX$ (illetve $XA$): $X$ első sora (illetve oszlopa) szorzódik 3-mal. $BX$ (illetve $XB$): $X$ első sorához (második oszlopához) hozzáadódik $X$ második sorának (első oszlopának) kétszerese. $CX$ (illetve $XC$): megcserélődik $X$ első két sora (oszlopa).

**8.** ***(*)*** Igazoljuk, hogy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**9.** ***(*)*** Az a $k \times n$-es mátrix, melynek minden eleme $2^{kn-1}$ (mert $2^{kn-1}$ olyan mátrix van, ahol pl. az első sor első eleme 1-es, hisz a többi $kn - 1$ hely mindegyike függetlenül 0 vagy 1).