Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Negyedik feladatsor — megoldások

Emlékeztető. Ha adott oszlopvektorok egy rendszere, akkor ennek a **rangját** úgy határozhatjuk meg, hogy egy mátrixba írjuk őket és elvégezzük a Gauss-eliminációt (a karikázást, ameddig lehetséges, itt nincs vonal és jobb oldali rész). A rang a vezéregyesek (karikák) száma. *A karikával megjelölt oszlopok bázist alkotnak a vektorok által generált altérben.*

1. A rang 3, illetve 4, az elimináció végeredménye alább látható.

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 31/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 11/5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -28/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Az alábbiakban szerepel a hat elimináció eredménye, alattuk az általános megoldás.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$(x, y, z) = (1, -1, 2)$ ellentmondásos $(x, y, z) = (-2 + z,\ 5 - z,\ z)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & -5 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$(x_1, x_2, x_3) = (16, -5, -1)$ $(x, y) = (-9, 6)$ $(x_1, -9 - 4x_1 + 5x_3, x_3, 6 + 2x_1 - 3x_3)$

3. Az első esetben $(x, y) = (1, 1)$, a második rendszer ellentmondásos, a harmadikban $(x, y) = (0, 2)$. A tanulság az, hogy az együtthatók esetében elkövetett nagyon kis mérési vagy közelítési hiba is drasztikusan megváltoztathatja az eredményt.

4. Az elimináció második és harmadik lépése:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-r^2 & 1-r & 1-r \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r & r-1 & 0 \end{array}\right] \underset{(r \neq 1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1+r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & r+2 & 1 \\ 1 & 0 & r+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Az első mátrixból $r = 1$ esetén az $(x_1, x_2, x_3) = (1-x_2-x_3, x_2, x_3)$ általános megoldás adódik (ez végtelen sok). Az utolsó mátrixban az első sor $r = -2$ esetén tilos, ezért ekkor nincs megoldás. Ha $r \notin \{-2, 1\}$, akkor az $r + 2$-t bekarikázhatjuk és így egyértelmű a megoldás.

Egy független rendszer elemszáma mindig legfeljebb akkora, mint egy generátorrendszeré. Ezért mindegyik bázis elemszáma ugyanaz a k szám: a **dimenzió**. Ha a dimenzió k, akkor minden k elemű független rendszer és minden k elemű generátorrendszer bázis. Minden független rendszer kibővíthető bázissá, minden generátorrendszer tartalmaz bázist.

5. Az előző bekezdés alapján e) és f) igaz. Igaz még a b) (hiszen független rendszer legfeljebb k elemű lehet, mert legfeljebb annyi az elemszáma, mint egy generátorrendszeré, például egy bázisé) és a c) is (hiszen legalább akkora az elemszáma, mint egy független rendszeré, például egy bázisé). Az a) hamis (pl. a $\mathbf{0}$ önmagában összefüggő, tehát ez az egyelemű rendszer ellenpélda minden legalább kétdimenziós U esetén), és d) is hamis (például vehetjük az $[1, 1]^T, [2, 2]^T, \dots, [k, k]^T$ vektorokat, ha $U = \mathbb{R}^2$, ezek egydimenziós alteret generálnak.)

6. Egy k-dimenziós alteret úgy a legegyszerűbb konstruálni, hogy veszünk egy $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ bázist, és az első k bázisvektor által generált alteret tekintjük. Ha például a triviális $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ bázist vesszük $\mathbb{R}^4$-ben és $k = 2$, akkor $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ elemei

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\0\\0\end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Ez az altér azokból a $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ vektorokból áll, melyekre $x_3 = x_4 = 0$. Hasonlóan, ha a

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

bázist vesszük $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, akkor például $\mathrm{Span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ háromdimenziós altér lesz. Ez azokból a mátrixokból áll, amelyekben az utolsó sor utolsó eleme nulla.

7. Generátorrendszert úgy kereshetünk, hogy az altér elemeit lineáris kombinációként írjuk föl. Ennek minden független részhalmaza bázis lesz, amit a korábban tanult technikával találhatunk meg (Gauss-eliminációt végzünk, és kiválasztjuk azokat az oszlopokat, melyekben van karika). Illusztrációképpen a b) feladat megoldása $n = 3$ esetén a következő.

Alteret kapunk (ellenőrizni kell a zártsági tulajdonságokat). Az általános elem

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2\,.$$

Ezért $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ generátorrendszer, de nyilván független is, azaz bázis.

a) Egydimenziós altér, bázis: $[1, 1, \ldots, 1]^T$.
b) Kétdimenziós altér, bázis: $[1, 0, 0, \ldots, 0]^T$, $[0, 1, 0, \ldots, 0]^T$.
c) Nem altér, $[0, 1, 0, \ldots, 0]^T$ és $[1, 0, 1, \ldots, 1]^T$ eleme, de az összegük nem.
d) Nem altér, nincs benne a nullvektor.
e) Kétdimenziós altér, bázis $[1, 0, 1, 0, \ldots]^T$ és $[0, 1, 0, 1, \ldots]^T$.
f) Háromdimenziós altér. Az első bázisvektor $[1, 0, 0,\ 1, 0, 0,\ \ldots]^T$ (hármasával periodikus), a második $[0, 1, 0,\ 0, 1, 0,\ \ldots]^T$, a harmadik $[0, 0, 1,\ 0, 0, 1,\ \ldots]^T$.
g) Ha $y \neq 0$, akkor nem altér, mert nincs benne a nullvektor. Ha $y = 0$, akkor altér, a dimenziója $n - 1$, bázist alkotnak benne például az alábbi vektorok:

$$\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = [1, -1, 0, \ldots, 0]^T, \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 = [1, 0, -1, 0, \ldots, 0]^T, \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_n = [1, 0, 0, \ldots, 0, -1]^T.$$

8. A legegyszerűbb, ha a két altér egy-egy bázisát egyesítjük. Ekkor a két altér által generált altérben egy generátorrendszert kapunk, amiből már ki tudunk választani a tanult módszerrel egy bázist. Három mintát mutatunk, mindet $n = 4$ esetén.

Az a) és e) pontokban szereplő alterek esetében a kapott három vektor együttvéve már nem független, mert $[1, 1, 1, 1]^T = [1, 0, 1, 0]^T + [0, 1, 0, 1]^T$. Itt a generált altér ugyanaz, mint az e)-beli altér, mert az a)-beli altér ennek része.

A b)-beli és e)-beli iltereket véve a generátorrendszerek uniója is független lesz, ezért a kapott altér az egész $\mathbb{R}^4$.

Végül az a) és b) esetében szintén független a három vektor együtt, a generált altér elemei $x_1[1, 1, 1, 1]^T + x_2[1, 0, 0, 0]^T + x_3[0, 1, 0, 0]^T = [x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1, x_1]^T$. Ez az altér azokból a vektorokból áll, melyeknek az utolsó két koordinátája egyenlő.