A Gauss-elimináció

A módszer arra szolgál, hogy egy lineáris egyenletrendszer **összes** (sokszor végtelen sok) megoldását megtaláljuk. Egy egyenletrendszer akkor **lineáris,** ha az ismeretlenek nincsenek egymással összeszorozva (tehát nem szerepel benne pl. xy vagy z^2), és osztani sem kell velük. Példa erre a következő:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ha pl. $z = 1$, akkor a második egyenletből $x = 1$, és akkor az első és harmadik egyenletből is (szerencsés módon) ugyanaz jön ki: hogy $y = 1$. De ha $z = 0$-val próbálkozunk, akkor $x = 2$, és ismét $y = 1$ adódik.

Sőt, z értékét **bárhogy** megválaszthatjuk. Ha z valamilyen r szám, akkor a második egyenletből $x = 2 - r$, és így az első és harmadik egyenletből is az $y = 1$ értéket kapjuk. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez mindegyik egyenletet kielégíti. Ezért

az egyenletrendszer **általános** (paraméteres) **megoldása** $(x, y, z) = (2 - r, 1, r)$.

Tehát r bármely értékéhez kapunk egy megoldást, pl. ha $r = 4$, akkor $(x, y, z) = (-2, 1, 2)$.

Egy ilyen képletnek az az értelme, hogy a megoldásokkal könnyebben lehet tovább számolni, mint az eredeti egyenletrendszerrel. Ha például az a feladat, hogy mik a nemnegatív egész megoldások, akkor látjuk, hogy $r \geq 0$ és $2 - r \geq 0$, vagyis r csak 0, 1, vagy 2 lehet. Ezért a nemnegatív egész megoldások (x, y, z)-re ezek: $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ és $(0, 1, 2)$.

(Érdemes meggondolni, hogy mit jelent ez a geometria nyelvén. Az $x + y + z = 1$ a térben egy **síknak** az egyenlete. Hasonlóan síkot határoz meg a másik két egyenlet is. Ezért az egyenletrendszer megoldásai három sík közös pontjait adják. Általában ez csak egy pont, de a fenti esetben az első két sík metszésvonalán a harmadik sík is átmegy, ezért itt a közös rész egy egyenes, és az általános képlet amit kaptunk, ennek a térbeli egyenesnek az egyenlete.)

Az imént a z értékét szabadon megválaszthattuk. Ez nincs így mindegyik ismeretlennel. Az első egyenletből a másodikat kivonva $y = 1$ jön ki, tehát y-t nem választhatjuk szabadon. A Gauss-elimináció egy számítógépes algoritmust ad annak meghatározására, hogy az egyenletrendszernek van-e megoldása egyáltalán, és ha igen, akkor hogyan találhatunk szabadon megválasztható ismeretleneket ahhoz, hogy az általános megoldást fel tudjuk írni.

Mielőtt elkezdenénk, az egyenletrendszert átírjuk mátrixos alakba, hogy később kevesebbet kelljen írni. Ez azt jelenti, hogy készítünk egy táblázatot az együtthatókból és a jobb oldalon álló értékekből, a következőképpen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Ha emlékeztetni akarjuk magunkat az ismeretlenek jelölésére, akkor az x, y, z betűket az első három oszlop tetejére írhatjuk. A sorok az egyenleteknek felelnek meg.

Az algoritmus során egy szisztéma szerint a következő lépést alkalmazzuk többször egymás után: az egyik egyenletből (vagyis a fenti mátrix egyik sorából) kivonjuk egy másik egyenlet (vagyis sor) alkalmas számszorosát. Könnyű meggondolni, hogy egy ilyen lépés során az egyenletrendszer megoldásai nem változnak meg. A cél az, hogy a mátrixban minél több nulla legyen, mert akkor lesz könnyű leolvasni a megoldásokat. Ideális esetben mindegyik egyenletben csak egy ismeretlen szerepel majd nem nulla együtthatóval, pl. $x = 1$, $y = 2$.

Az algoritmus

(1) Bekarikázunk a mátrix bal oldalán (azaz a függőleges vonaltól balra) egy nem nulla számot úgy, hogy a sorában és az oszlopában ne legyen másik karika.
(2) A karikázott számmal végigosztjuk a sorát (ekkor a karikás szám 1-gyé változik, ennek neve **vezéregyes**).
(3) A vezéregyes alatti és fölötti számokat nullává tesszük úgy, hogy a vezéregyes sorának alkalmas számszorosát rendre kivonjuk a többi sorból.

Az $(1), (2), (3)$ lépéseket ebben a sorrendben addig ismételjük, amíg el nem akadunk, azaz amikor már nincs mit karikázni. Ez lesz a STOP állapot.

Az imént vizsgált egyenletrendszer esetében ez például így végezhető:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az első átalakítás során a második sort kivontuk az első sorból, majd a második sor kétszeresét kivontuk a harmadik sorból. Azután karikáztunk, végül az első sort kivontuk az utolsóból. A negyedik mátrix már STOP állapotban van, nem tudunk karikázni. Valóban, karikázni csak „új” sorban és „új” oszlopban lehet (ahol még nincs karika), vagyis csak azt a számot karikázhatnánk, ami a harmadik sorban a vonal mellett balra van, de azt nem karikázhatjuk be, mert nulla.

A megoldások leolvasásának megértéséhez lássunk három egyszerűbb példát.

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Ránézésre is láthatjuk, hogy az első egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása ($x = y = 1$), a másodiknak nincs (mert ha $x + y = 2$, akkor $2x + 2y = 4$), a harmadiknak pedig végtelen sok megoldása van. A megfelelő mátrixok STOP alakja a következő (ellenőrizzük!):

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & y \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Írjuk ezeket a mátrixokat vissza egyenletrendszer alakba:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ 0 &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletrendszerben a $0 = -1$ egyenlet önmagában ellentmondást hordoz, ezért itt nincs megoldás. Ennek a mátrixban úgynevezett **tilos sor** felel meg: olyan sor, amelynek a bal oldala végig nulla, de a jobb oldala nem. **Egy egyenletrendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, vagyis akkor és csak akkor ellentmondásos, ha az elimináció során keletkezik tilos sor.**

A harmadik egyenletrendszer esetében a mátrix utolsó sora **csupa nulla sor**. Az ilyeneket nyugodtan kihúzhatjuk a mátrixból, a végeredményt nem befolyásolják. Ezután egy változót (ismeretlent) nevezzünk **szabad**nak, ha az oszlopában nincs karika, és **kötött**nek, ha van. A harmadik egyenletrendszerben tehát x kötött, y szabad változó. Az első egyenletrendszerben nincs szabad változó, mindkettő kötött, és ezért lesz egyértelmű a megoldás.

A megoldások leolvasása a STOP alakból

(1) Ha van tilos sor, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos.
(2) Ha nincs, akkor a mátrixot egyenletrendszerre visszaírva a szabad változókat átvihetjük a jobb oldalra. Ezzel minden kötött változót kifejeztünk a szabadok segítségével. **A szabad változók tetszőleges értéket kaphatnak, és ez a választás az egyenletrendszer megoldását egyértelműen meghatározza.**

Speciálisan **a megoldás akkor és csak akkor egyértelmű, ha nincs tilos sor, és nincs szabad változó.**

A kiinduló példánkban x és y kötött, a harmadik oszlophoz tartozó z szabad változó, tilos sor nincs. Így az első sorból $y = 1$, a másodikból $x = 2 - z$ adódik, az általános megoldás $(x, y, z) = (2 - z, 1, z)$, ahol z értéke tetszőleges szám lehet (ez jött ki az első oldalon is).

A Gauss-eliminációt többféleképpen is végezhetjük, ha máshogy karikázunk. Például így:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Itt x szabad változó, és y, z kötött, az általános megoldás pedig $(x, y, z) = (x, 1, 2 - x)$. Ez formálisan másképp néz ki, mint az a képlet, amit akkor kaptunk, amikor z volt szabad, de ugyanazokat a számhármasokat adja megoldásként (csak máshogy paraméterezve).

A megoldást úgy **ellenőrizhetjük,** hogy az általános megoldást visszahelyettesítjük az egyenletekbe, ekkor **azonosságot** kell, hogy kapjunk. Például az $(x, y, z) = (x, 1, 2 - x)$ megoldást a harmadik egyenletbe visszahelyettesítve

$$2x + 1 + 2(2 - x) = 5$$

tényleg azonosság: x kiesik és a kapott szám mindkét oldalon 5. Ez az ellenőrzés a számolási hibák ellen véd, ha biztosak vagyunk a hibátlan számolásban, akkor nem szükséges elvégezni.

A megoldások száma

Érvényes az alábbi tétel: **ha egy lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem egyértelmű a megoldás.** Ezt talán úgy lehet megjegyezni, hogy arra gondolunk: ha túl kevés az információ, akkor abból nehéz kitalálni egy egyértelmű megoldást. Ez azonban nem precíz meggondolás, óvatosnak kell lennünk, sőt nemlineáris egyenletrendszerre nem is igaz az állítás. Például az $x^2 + y^2 = 0$ egyenletnek a valós számok körében egyértelmű megoldása van, csak $x = y = 0$ jó, miközben kevesebb egyenlet (1) van, mint ismeretlen (2).

A precíz gondolatmenet a következő. Nézzük a Gauss-elimináció STOP állapotát. Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs tilos sor, ezért kapunk egy általános megoldást. Ebben nem lehet szabad változó, mert annak a helyébe többféle számot is írhatnánk, és így nem lenne egyértelmű a megoldás. De ha nincs szabad változó, akkor minden oszlopban van karika. Minden karika más sorban van, tehát legalább annyi sor van, mint oszlop.

Más hasonló összefüggés nem igaz az egyenletek száma, az ismeretlenek száma és a megoldások száma között. Ellentmondást tudunk csinálni már két egyenlettel is, akárhány ismeretlen is van, pl. $x + y + z = 0$ és $x + y + z = 1$. Az egyenletek számát is büntetlenül szaporíthatjuk, pl. az $x = 1$, $2x = 2$, $3x = 3$ rendszernek is egyértelmű megoldása van.

Egy lineáris egyenletrendszert **homogénnek** nevezünk, ha az egyenletek jobb oldalán (azaz a mátrix utolsó oszlopában) álló számok mind nullával egyenlők. Ilyenkor mindig van megoldás, mert az összes ismeretlen helyébe nullát írhatunk. Ezt hívjuk az egyenletrendszer **triviális megoldás**ának. A többi a nemtriviális megoldás. Az imént bizonyított állítás ezért a következőt adja: **ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor van nemtriviális megoldása.**

Lineáris függetlenség

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{d}$ oszlopvektorok és $x, y, \ldots, v$ ismeretlenek, akkor $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + \ldots + v\mathbf{d} = \mathbf{0}$ egy homogén lineáris egyenletrendszert ad e vektorok koordinátáira. Például ha

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix},$$

akkor az ismeretleneket x, y, u, v-nek nevezve a kapott egyenletrendszer ez lesz:

$$\begin{aligned} x + y + u + v &= 0 \\ 2\,x + 3\,y + 4\,u + 5\,v &= 0 \\ 3\,x + 4\,y + 5\,u + 6\,v &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

azaz $(x, y, u, v) = (u+2v, -2u-3v, u, v)$. Itt két szabad paraméter van, a megoldások száma végtelen. Ezért van nemtriviális megoldás is, pl. $u = 1$, $v = 0$-ra $(x, y, u, v) = (1, -2, 1, 0)$.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{d}$ vektorok **lineárisan függetlenek,** ha a fenti lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, azaz ha $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + \ldots + v\mathbf{d} = \mathbf{0}$ csak akkor teljesülhet, ha mindegyik ismeretlen értéke nulla. Ennek vizsgálatához az egyenletrendszert nem is kell felírni, láthatjuk, hogy a Gauss-eliminációs mátrix oszlopai pont az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{d}$ vektorok, az utolsó oszlop pedig végig nulla, ezt sem érdemes kiírni az elimináció során.

Az, hogy csak triviális megoldás van, azzal egyenértékű, hogy a megoldás egyértelmű, azaz, hogy **nincs szabad változó.** Ezért a lineáris függetlenséget úgy dönthetjük el, hogy oszlopvektorainkat egy mátrixba írjuk és elvégezzük az eliminációt. *A vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha minden oszlopban lesz karika.*

Ha *a vektoraink között ott a nullvektor,* akkor ezt vehetjük 1 együtthatóval, a többit 0 együtthatóval, ekkor az összeg nulla lesz. Ezért a vektorok összefüggenek. Ha a rendszerben *az egyik vektora egy másik vektor számszorosa,* pl. $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$, akkor $2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 0\mathbf{c} + \ldots + 0\mathbf{d} = \mathbf{0}$, és mivel nem minden együttható nulla ezek a vektorok is lineárisan összefüggenek.

Speciálisan ha csak két vektor van, akkor semmit nem kell számolni: ha „arányosak", vagyis az egyik a másiknak számszorosa (speciálisan ha az egyik a nullvektor) akkor összefüggenek, különben nem. Például $[1, 2, 3]^T$ és $[2, 4, 6]^T$ arányosak, tehát összefüggők, de $[1, 2, 3]^T$ és $[2, 4, 7]^T$ függetlenek (helykímélés céljából írtuk sorvektorok transzponáltjait). Három vektor esetén már nincs ilyen egyszerű módszer, nem igaz az, hogy akkor lennének függetlenek, ha bármely kettő független, például összefügghetnek úgy is, hogy az egyik a másik kettő összege.

Végül: ha több vektor van, mint amilyen magasak (a példánk is ilyen: 4 darab 3 komponensű vektor van), akkor biztosan összefüggenek a lap tetején szereplő állítás miatt. Ilyenkor ugyanis kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen.