Proginfo lineáris algebra gyakorlat

Harmadik feladatsor — megoldások

Emlékeztető. Ha adottak vektorok, pl. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, akkor $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ jelöli a belőlük képezhető lineáris kombinációk halmazát, vagyis az $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ vektorokét, ahol α, β, γ bármilyen skalár lehet. Ez az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által **generált altér**, ami a legszűkebb olyan altér, ami az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokat tartalmazza. Azt, hogy egy $\mathbf{d}$ vektor benne van-e $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$-ben, a $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ egyenletrendszer megoldásával dönthetjük el: akkor lesz benne, ha van megoldás, azaz nem keletkezik tilos sor az elimináció során.

3. A generáló vektorokat beírjuk a mátrix bal oldalába, a generálandót a vonal mögé.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Az utolsó tilos sor, mert a vonal előtti rész végig nulla, de a jobb oldali szám nem. Ezért nincs megoldás, a megadott vektor nincs benne a generált altérben.

8. Ugyanúgy számolunk, mint az előző feladatban. Az eredmény: az a) és c) esetben nincs benne, a b) esetben benne van, ekkor $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} - \mathbf{c}$.

A fenti eljárás segítségével el tudjuk dönteni, hogy két generált altér egyenlő-e. Akkor egyenlők, ha mindegyik generált altér tartalmazza a másik generátorait. Pl. $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ és $\mathrm{Span}(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ akkor lesznek egyenlők, ha $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ és $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathrm{Span}(\mathbf{e}, \mathbf{f})$.

4. Ahhoz, hogy $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, a következőket kell megmutatni.

(1) $\mathbf{a} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, ez nyilvánvaló.
(2) $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, ez igaz, mert $\mathbf{b} = -\mathbf{a} - \mathbf{c}$.
(3) $\mathbf{a} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, ez nyilvánvaló.
(4) $\mathbf{c} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, ez igaz, mert $\mathbf{c} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}$ **generátorrendszert** alkotnak az U altérben, ha $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}) = U$. Minden ilyen generátorrendszerből kiválasztható néhány vektor, amely nemcsak generátorrendszer U-ban, hanem lineárisan függetlenek is, azaz U-nak **bázisát** alkotják. Ilyen bázist úgy találhatunk, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}$ oszlopvektorokat egy mátrixba írjuk és elvégezzük az eliminációt. Azok a vektorok, amelyek oszlopában keletkezik karika, bázist alkotnak. E bázis elemszámát, vagyis a karikák számát az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}$ vektorrendszer **rangjának** nevezzük.

9. Az a) esetben

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

az első két oszlopban van karika, ezért az első két vektor biztosan bázist alkot. A b) esetben a vektorok függetlenek, hárman alkotnak bázist. A c) kérdésnél a vektorokat kiszámolva

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ezért $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ bázist alkot. Végül a d) vektorai függetlenek, hárman bázist alkotnak.

Ha $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ bázis egy U altérben, akkor minden $\mathbf{d} \in U$ vektor egyértelműen írható fel $\alpha_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{b}_n$ alakban. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $[\mathbf{d}]_{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T$ a **d koordinátavektora** ebben a bázisban (tehát az együtthatókat egy oszlopvektorba írjuk). E koordinátavektor kiszámításához lineáris egyenletrendszer megoldásával juthatunk. Például a **9**/b) feladatban szereplő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázisvektorok segítségével az $\mathbf{e}_1$ triviális bázisvektor úgy írható fel, hogy $\mathbf{e}_1 = (1/2)\mathbf{a} + (1/2)\mathbf{b} - (1/2)\mathbf{c}$, ezért $[\mathbf{e}_1]_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} = [1/2, 1/2, -1/2]^T$.

Ha $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázis és $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{b}_k$, akkor $\mathbf{b}_i$ pontosan akkor cserélhető ki $\mathbf{a}$-ra úgy, hogy ismét bázist kapjunk, ha $\alpha_i \neq 0$. Ebben az esetben, ha egy $\mathbf{x}$ vektor koorinátavektora a $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázisban $[x_1, \ldots, x_k]^T$, akkor a $\mathbf{b}_i \to \mathbf{a}$ **elemi bázistranszformáció** képlete

$$[\mathbf{x}]_{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{i-1},\mathbf{a},\mathbf{b}_{i+1}\ldots,\mathbf{b}_k} = \begin{bmatrix} x_1 - (x_i/\alpha_i)\alpha_1 \\ \vdots \\ x_i/\alpha_i \\ \vdots \\ x_k - (x_i/\alpha_i)\alpha_k \end{bmatrix}$$

(az x_i/α_i az i-edik sorban van, ez az $\mathbf{a}$ bázisvektorhoz tartozó koordináta).

1. Itt $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = -1$. A bázisba az $\mathbf{a}$ vektor a $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_4$, $\mathbf{b}_5$ helyére cserélhető be, mert ezek azok a bázisvektorok, amelyek $\mathbf{a}$ előállításában nem nulla koordinátával szerepelnek. A fenti képletben $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 0$, ezért $\mathbf{c}$ koordinátái a három új bázisban rendre $[1, 1, 3, 3, 1]^T$, $[1, -6, 3, 4, 4]^T$, $[1, 2, 3, 4, 0]^T$.

2. Az $\mathbf{e}_1 \to \mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_2 \to \mathbf{a}_2$, $\mathbf{e}_3 \to \mathbf{a}_3$, $\mathbf{e}_4 \to \mathbf{a}_4$ transzformációkat hajtjuk végre. E lépések során az $\mathbf{a}_5$ koordináta-oszlopvektorában a számok az alábbiak szerint változnak:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3/2 \end{array}$$

Az utolsó oszlop azt fejezi ki, hogy $\mathbf{a}_5 = -(1/2)\mathbf{a}_1 - (1/2)\mathbf{a}_2 - (1/2)\mathbf{a}_3 + (3/2)\mathbf{a}_4$.

5. ***(*)*** Pontosan akkor, ha U_1 és U_2 egyike tartalmazza a másikat. Ha ez igaz, akkor $U_1 \cup U_2$ a két altér egyikével egyenlő, tehát altér. Megfordítva, ha egyik altér sem tartalmazza a másikat, akkor van $\mathbf{a} \in U_1$, ami nincs U_2-ben és van $\mathbf{b} \in U_2$, ami nincs U_1-ben. Ezáltal $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ is $U_1 \cup U_2$-ben van, de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nincs (ezért az unió nem zárt az összeadásra), mert ha pl. $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U_1$ teljesülne, akkor $\mathbf{a} \in U_1$ miatt a $\mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{a} \in U_1$ ellentmondást kapnánk.

6. ***(*)*** Összefüggő. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$ benne van $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$-ben, ahol bármely három vektor összefüggő. Ezt a dimenzió tulajdonságainál látjuk majd, de homogén lineáris egyenletrendszer felírásával is megkaphatjuk (három ismeretlen, két egyenlet, így van nemtriviális megoldás).

7. Ha $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, akkor $\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k$ alkalmas skalárokra, és ez nemtriviális lineáris kombinációt eredményez. Megfordítva, tegyük fel, hogy $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$, és nem minden együttható nulla. Ha $\beta = 0$ lenne, akkor ellentmondást kapnánk azzal, hogy $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ független. Ezért $\beta \neq 0$, de akkor $\mathbf{b}$ kifejezhető a fenti egyenletből.

10. ***(*)*** Pontosan akkor, ha $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{kk}$ egyike sem nulla. Az adott vektorok egy ismeretlen együtthatós lineáris kombinációját nullával egyenlővé téve, majd az $\mathbf{a}_i$ szerint rendezve homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, amelynek mátrixában éppen a λ_{ij} számok állnak. Ennek leggyorsabb megoldási módját a determinánsok elmélete szolgáltatja majd.