Proginfo lineáris algebra gyakorlat
Második feladatsor — megoldások

Emlékeztető. Az U részhalmaz **altér**, ha

(0) tartalmazza a nullvektort (elég az is, hogy U nem üres);
(1) ha $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, akkor $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$ (azaz **zárt az összeadásra**);
(2) ha $\mathbf{u} \in U$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda\mathbf{u} \in U$ (azaz **zárt a λ-szorosra**).

Az $\mathbb{R}^n$-ben bármely $n+1$ vektor lineárisan összefüggő.

1. Az a) esetben az $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}+\delta\mathbf{d}+\varepsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}$ lineáris egyenletrendszer általános megoldása $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (\varepsilon/2, \varepsilon/2, \varepsilon/2, -3\varepsilon/2, \varepsilon)$, innen $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{d}+2\mathbf{e} = \mathbf{0}$. A G1/8 megoldásához hasonlóan azt kapjuk, hogy a legfeljebb négyelemű részhalmazok függetlenek, de az öt vektor összefügg (amit abból is tudunk, hogy többen vannak, mint amilyen a „magasságuk”). A b) esetben a vektorok függetlenek, és így minden részhalmaz is független.

2. Ha azt akarjuk igazolni, hogy egy U részhalmaz altér, akkor ellenőrizni kell a három zártsági tulajdonságot. Ha azt gondoljuk, hogy nem altér, akkor elég példát adni arra, hogy valamelyik zártsági tulajdonság nem teljesül.

a) Altér. A $\mathbf{0}$ benne van, mert ha $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, akkor $4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$. Az összeadásra való zártsághoz legyen $\mathbf{a} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ és $\mathbf{b} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$. Ekkor $\mathbf{a}+\mathbf{b} = [x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4]^T$. Mivel $\mathbf{a}$ benne van az altérben, ezért $4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$. Hasonlóan, mivel $\mathbf{b}$ benne van az altérben, $4y_1 - 3y_3 + y_4 = 0$. Összeadva $4(x_1+y_1) - 3(x_3+y_3) + (x_4+y_4) = 0$. Ezért $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ is benne van az altérben. Végül a λ-szorosra való zártsághoz szorozzuk meg a $4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$ egyenletet λ-val. Ekkor $4(\lambda x_1) - 3(\lambda x_3) + (\lambda x_4) = 0$. Ezért $\lambda\mathbf{a} = [\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4]^T$ is benne van az altérben. Általában a homogén lineáris egyenletekkel (mint $4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$) megadott részhalmazok alterek lesznek.

b) Nem altér, nem zárt az összeadásra. Például $\mathbf{a} = [1,1,1,1]^T$ benne van a részhalmazban, mert $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$. Hasonlóan $\mathbf{b} = [1,6,2,3]^T$ is benne van, mert $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$. De $\mathbf{a}+\mathbf{b} = [2,7,3,4]^T$ nincs benne, mert $2 \cdot 7 \neq 3 \cdot 4$. (Ezt a példát a következőképpen lehet megtalálni. Olyan számokat kell keresni, hogy $x_1x_2 = x_3x_4$ és $y_1y_2 = y_3y_4$, de $(x_1+y_1)(x_2+y_2) \neq (x_3+y_3)(x_4+y_4)$. Algebrai átalakítás után kísérletezzünk.)

c) Altér, mert csak a nullvektorból áll, hiszen egy nem nulla valós szám négyzete mindig pozitív. (A példa becsapós, komplex számokra az analóg részhalmaz nem lesz altér.)

d) Nem altér. Például a -1 -gyel való szorzás kivezet, hiszen $[2,1,0,0]^T$ benne van a részhalmazban, de az ellentettje nincs.

e) Nem altér, a nullvektor nincs benne. (Az $x_1 + 4x_4 = 2$ egyenlet nem homogén.)

f) Altér, $x_4^3 = 0$ azzal egyenértékű, hogy $x_4 = 0$, ami homogén lineáris egyenlet.

4. Két egyszerűbb feladat: ha $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b} \in V$, akkor benne van-e V-ben $\mathbf{a}$? És ha az a feltétel, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$ és $2\mathbf{a}+2\mathbf{b} \in V$?

Az első esetben a válasz igenlő: az összeadásra zártság miatt $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \in V$, azaz $2\mathbf{a} \in V$, és az $1/2$ skalárral való szorzásra zártság miatt $(1/2)(2\mathbf{a}) \in V$, azaz $\mathbf{a} \in V$. Általában hasznos úgy eljárni, hogy az altér elemeinek lineáris kombinációival próbálkozunk, mert azok is benne lesznek az altérben.

A második esetben a válasz nemleges, ezért ellenpéldát kell adnunk. Álljon V csak a nullvektorból $\mathbb{R}^3$-ben, és legyen $\mathbf{a} = [1,0,0]^T$ és $\mathbf{b} = [-1,0,0]^T$. Ekkor $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és és $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ is a nullvektor, tehát V-ben van, de $\mathbf{a}$ nem a nullvektor, nincs V-ben.

Harmadik és negyedik segédfeladat: ha $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$, de $\mathbf{a}-\mathbf{b} \notin V$, akkor következik-e, hogy $\mathbf{a} \in V$? És ha az a feltétel, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ sincs V-ben?

A harmadik feladatnál többet igazolunk: nemcsak azt, hogy $\mathbf{a} \in V$ nem következik a feltételekből, vagyis nem mindig teljesül, hanem azt is, hogy soha nem teljesülhet. **Indirekt** bizonyítunk: tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \in V$. Ekkor $(\mathbf{a}+\mathbf{b})-\mathbf{a} \in V$, azaz $\mathbf{b} \in V$, de akkor $\mathbf{a}-\mathbf{b} \in V$ teljesülne, ami **ellentmondás.** Ezért tényleg $\mathbf{a} \notin V$.

A negyedik feladatnál az is előfordulhat, hogy $\mathbf{a} \in V$ és az is, hogy $\mathbf{a} \notin V$. A feladat kérdésére választ ad, ha olyan példát találunk, amikor $\mathbf{a} \notin V$ (a válasz az, hogy „nem következik"). Legyen ismét V a nullvektorból álló altér $\mathbb{R}^3$-ben és $\mathbf{a} = [1,0,0]^T$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Az eredeti feladat megoldása a következő: $(2\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c})-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) \in V$, azaz $\mathbf{a}+\mathbf{c} \in V$. Ezért $\mathbf{b} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-(\mathbf{a}+\mathbf{c}) \in V$. Ha $\mathbf{a} \in V$ lenne, akkor $\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{a} \in V$ teljesülne. Hasonlóan $\mathbf{c} \in V$-ből $\mathbf{a} \in V$ következne. De mindez lehetetlen, mert akkor $\mathbf{b}+3\mathbf{c} \in V$ is fennállna. Ezért a feladat kérdésére a válasz: $\mathbf{b} \in V$, de $\mathbf{a}, \mathbf{c} \notin V$.

5. Legyen $\mathbf{a} = [1,0,0]^T$, $\mathbf{b} = [2,0,0]^T$, $\mathbf{c} = [1,1,0]^T$.

a) Független rendszer része is független, a definíció alapján látható.
b) Mindkettő lehet, pl. $\{\mathbf{a}\}$ független (mert $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$), $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ összefüggő, $\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}$ független.
c) Mindkettő lehet, pl. $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ Ö, $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ Ö, $\{\mathbf{a},\mathbf{c}\}$ L.
d) Összefüggő marad, ez az a) átfogalmazása. Valóban, ha a kibővített rendszer független lenne, akkor annak minden része független lenne, az eredeti is, ellentmondás.
e) Független lesz, a) miatt, hiszen minden bázis független rendszer.
f) Összefüggő lesz. Ha $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ bázis, és $\mathbf{a}$ az új vektor, akkor $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b}_1+\ldots+\lambda_n\mathbf{b}_n$ alakban írható, és ezért $\mathbf{a}$-t a másik oldalra átvíve nemtriviális lineáris kombinációt kapunk, ami a nullvektorral egyenlő.
g) Összefüggő. Ha $\mathbf{d} = 4\mathbf{e}$, akkor $\mathbf{d}-4\mathbf{e} = \mathbf{0}$ miatt $\{\mathbf{d},\mathbf{e}\}$ összefüggő, és ezért d) miatt az egész rendszer is összefüggő.
h) Összefüggő. Ha $\mathbf{d} = \mathbf{e}+\mathbf{f}$, akkor $\mathbf{d}-\mathbf{e}-\mathbf{f} = \mathbf{0}$ miatt $\{\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f}\}$ összefüggő, és ezért d) miatt az egész rendszer is összefüggő.
i) Ha benne van a nullvektor, akkor összefüggő, mert a nullvektort vehetjük 1 együtthatóval, a többi vektort pedig 0 együtthatóval, ez nemtriviális lineáris kombináció.

6. *Segédfeladat:* ha $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ L, akkor $\{\mathbf{a},\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}\}$ is L. Általában, ha a rendszer egyik vektorához hozzáadjuk egy másik vektorának skalárszorosát, akkor a függetlenség nem változik.

Megoldás: ha $\alpha\mathbf{a}+\beta(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor ezt az egyenletet átrendezhetjük $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egy lineáris kombinációjává (ez azért jó stratégia, mert róluk tudjuk, hogy függetlenek). Vagyis $(\alpha+\lambda\beta)\mathbf{a}+\beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Mivel $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ független, ezért $\alpha+\lambda\beta = 0$ és $\beta = 0$, ahonnan $\alpha = 0$. Tehát $\{\mathbf{a},\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}\}$ tényleg független. A számolás ugyanez akkor is, ha a rendszerben vannak még további vektorok.

Ha viszont $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ összefüggő, akkor $\{\mathbf{a},\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}\}$ is az. Ehhez már nem kell számolni: az $\{\mathbf{a},\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}\}$ rendszerben a második vektorhoz az első $-\alpha$-szorosát adva az első rendszert kapjuk. Ha tehát a második rendszer független lenne, akkor az előző bekezdésben bizonyított állítás miatt független lenne az első rendszer is, ami ellentmondás.

a) Igaz. Közvetlenül is számolhatunk: az $\alpha\mathbf{a}+\beta(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\gamma(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ egyenletet $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ szerint rendezve, és az együtthatókat nullává téve homogén lineáris egyenletrendszert kapunk α, β, γ-ra, ugyanúgy, mint a fenti segédfeladatban.

Gyorsabb azt mondani, hogy itt a fenti átalakítást alkalmaztuk több lépésben. Ha $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ független, akkor ha a harmadik vektorhoz az elsőt, majd a másodikat hozzáadjuk, végül a másodikhoz az elsőt, akkor végig független rendszert kapunk.

b) Igaz, a harmadik vektorból kivonjuk a másodikat, majd a másodikból az elsőt.

c) Igaz. A kaptafa megoldás az $\alpha\mathbf{a}+\beta(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\gamma(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\delta(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ egyenletet $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ szerint rendezni, és észrevenni, hogy a kapott homogén lineáris egyenletrendszerben három egyenlet van négy ismeretlennel, tehát van nemtriviális megoldás. De ránézésre is látszik az $\mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ összefüggés.

d) Igaz, két lépésben $\{\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{c}\}$ függetlensége adódik majd részhalmazt veszünk.

e) Nem igaz. Pl. $\mathbf{a} = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{b} = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{c} = [0, 0, 1]^T$ függetlenek, de kiszámolhatjuk, hogy a kiinduló vektorrendszer összefüggő ebben a konkrét esetben.

Igazából arra érdemes gondolni, hogy a kiinduló vektorrendszer mindenképpen összefüggő lesz, hiszen $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) - 2(4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 6\mathbf{c}) + (7\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + 9\mathbf{c}) = \mathbf{0}$. Ezért bárhogy választunk független $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokat, az ellenpélda.

f) Nem igaz, sőt, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ minden esetben függetlenek (ami lineáris kombináció felírásával és az egyenletrendszer megoldásával igazolható). Az eredeti állítás megcáfolásához elegendő egy ellenpélda, pl. $\mathbf{a} = [-1, 1, 1]^T$, $\mathbf{b} = [1, -1, 1]^T$, $\mathbf{c} = [1, 1, -1]^T$.

g) Nem igaz, $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{0}$, vagyis ez a három vektor soha nem lesz független. Ha ránézésre nem vesszük észre ezt a lineáris összefüggést, akkor lineáris egyenletrendszer felírásával találhatjuk meg, mint fent.

7. Az előző feladat megoldási módszerét alkalmazhatjuk.

a) Függetlenek. Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ rendszerből indulunk, először az $\mathbf{a}_k$ vektort adjuk a többihez, majd $\mathbf{a}_{k-1}$-et a megelőzőkhöz, és így tovább.

b) Soha nem függetlenek, az összegük nulla.

c) Függetlenek, ez az e)-beli rendszer részrendszere.

d) Ha k páros, akkor összefüggenek, ha k páratlan, akkor függetlenek. (Erre úgy lehet rájönni, hogy kis k számokkal próbálkozunk először.) Valóban, ha k páros, akkor az első, a harmadik, az ötödik, stb. vektorok összege ugyanaz lesz, mint a második, a negyedik, a hatodik, stb. vektorok összege, mindkét összeg $\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_k$. Ha páratlan sok vektor van, akkor a tanult eljárással a lineáris egyenletrendszer felírva ez adódik: $\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_{k-1} + \alpha_k = 0, \alpha_k + \alpha_1 = 0$. Ezért $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots$, vagyis a páratlan indexű α_i-k megegyeznek, és a páros indexűek ezek ellentettjei. Mivel k páratlan, ezért $\alpha_1 = \alpha_k$, de az utolsó egyenelet szerint $\alpha_k + \alpha_1 = 0$, és így minden α_i együttható nulla.

e) Függetlenek. Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ rendszerből indulunk, előlről haladva minden vektorból kivonjuk a következőt. Az egyenletrendszeres megoldás: ha

$$\alpha_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + \ldots + \alpha_{k-1}(\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k) + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}\,,$$

akkor az $\mathbf{a}_i$-k szerint rendezve

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\mathbf{a}_2 + \ldots + (\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2})\mathbf{a}_{k-1} + (\alpha_k - \alpha_{k-1})\mathbf{a}_k = \mathbf{0}\,.$$

Tehát $\alpha_1 = 0$, és mivel $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, ezért $\alpha_2 = 0$. Tovább haladva kapjuk, hogy mindegyik $\alpha_i = 0$.

8. Pontosan akkor, ha $\mathbf{b}$ felírható $\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k$ alakban, ahol $\alpha_1+\ldots+\alpha_k = -1$. Valóban, ekkor $\alpha_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}) + \ldots + \alpha_k(\mathbf{a}_k + \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. Megfordítva, ha $\beta_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}) + \ldots + \beta_k(\mathbf{a}_k + \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ nemtriviális lineáris kombináció, akkor az $\alpha_i = -\beta_i/(\beta_1 + \ldots + \beta_k)$ választás megfelelő lesz.