**Proginfo lineáris algebra gyakorlat**

*Első feladatsor — megoldások*

**Elérhetőség:** `ewwkiss@gmail.com`
**Web:** `http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/faliujsag/`

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Az $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} + \varepsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}$ általános megoldása:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon\end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array} \sim \cdots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}\alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon\end{array} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array},$$

ahonnan az általános megoldás $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (-\delta - \varepsilon, -\delta - \varepsilon, \delta + 2\varepsilon, \delta, \varepsilon)$, ahol $\delta$ és $\varepsilon$ a szabad változók. **Mivel van szabad változó, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ lineárisan összefüggő.**

**2.** $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$ megoldását úgy kapjuk, hogy a fenti számolásban $\delta = \varepsilon = 0$ értéket helyettesítünk. (Elvégezhetnénk közvetlenül is az eliminációt az első három oszlopra.) Ekkor az általános megoldás képletéből $\alpha = \beta = \gamma = 0$ adódik, azaz $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ lineárisan független.

**3.** A megoldás $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-\delta, -\delta, \delta, \delta)$ (ezt $\varepsilon = 0$ helyettesítéssel kaptuk a fentiből). Tehát $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ lineárisan összefüggő. Ha $\delta = 1$, akkor $-\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ adódik.

**4.** Már $\varepsilon = 0$ estén is végtelen sok megoldás van, az előző feladat miatt.

**5.** Láttuk, hogy $-\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, ebből pedig $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ mindegyike kifejezhető. Például $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{d} - \mathbf{b}$. Általában az $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} + \varepsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}$ összefüggésből ki tudjuk fejezni azokat a vektorokat, amelyek együtthatója nem nulla. Ezért ha $\mathbf{e}$-t akarjuk kifejezni, akkor olyan általános megoldást kell választani, amelyben $\mathbf{e}$ együtthatója, azaz $\varepsilon \neq 0$. Legyen például $\varepsilon = 1$ és $\delta = 0$, akkor $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (-1, -1, 2, 0, 1)$, azaz $-\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c} + \mathbf{e} = 0$, ahonnan $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$. Vagyis $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ mindegyike kifejezhető a többi vektorral.

E megoldás helyett közvetlenül is számolhatunk. Ha az a kérdés, hogy $\mathbf{e}$ kifejezhető-e, akkor meg kell oldanunk az $\mathbf{e} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}$ egyenletrendszert, ami Gauss-eliminációval lehetséges. **Ha keletkezik tilos sor, akkor e nem fejezhető ki, különben igen.**

**6.** Ahhoz, hogy három összefüggő vektort találjunk, a $(-\delta - \varepsilon, -\delta - \varepsilon, \delta + 2\varepsilon, \delta, \varepsilon)$ megoldásban olyan $\delta$ és $\varepsilon$ értékeket kell keresnünk, hogy két együttható is nulla legyen, de az összes ne. Például $\delta + \varepsilon = 0$ elérhető, ha mondjuk $\delta = -1$ és $\varepsilon = 1$. Innen $\mathbf{c} - \mathbf{d} + \mathbf{e} = \mathbf{0}$.

**8.** Megvizsgálhatnánk mind a 16 részhalmazt Gauss-eliminációval (de ez nem praktikus). Gyorsabb megoldás: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d} = \mathbf{0}$ általános megoldása $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-\gamma, \gamma, \gamma, 0)$. Ezért $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ összefüggő, hiszen $-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Ekkor persze $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ is összefüggő. Azonban $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$, $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ függetlenek (és így minden részhalmazuk is az). Ez következik a fenti általános megoldás képletéből. Például ha $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ összefüggene, akkor ez olyan $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-\gamma, \gamma, \gamma, 0)$ megoldást jelentene, ahol $\alpha = 0$. De akkor $\gamma = 0$, azaz mindegyik együttható nulla lenne, ami nem megfelelő.

**9.** a) és b) igaz, c) nem, mert pl. $3[2, 2, 2]^T = 2[3, 3, 3]^T$ ellenpélda.