NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk $\mathbb{R}[x]$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy az $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-nek a $\lambda \in \mathbb{R}$-rel vett szorzata $\lambda f(0)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

Pl. $1 \cdot v = v$; $v = x$, mert $0 \neq x$.

12. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „azok az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomok, amelyeknek a foka legalább 3, a nullapolinommal együtt alteret alkotnak.”

Pl. x^3 és $-x^3 + x$ benne van, de az összegük nincs.

13. Legyen $v \in \mathbb{R}^3$ rögzített nem nulla vektor, és álljon W a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ azon lineáris transzformációiból, amelyeknek sajátvektora v. Mennyi $\dim W$?

7

14. Mely $c \in \mathbb{R}$-re teljesül, hogy $x^2 + 6x + 1 \in \langle x^2 - c, cx + 1 \rangle$?

2, -3.

15–16. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, Z, L, S, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) A összegtartó.
(Z) A skalárszorostartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(S) Leképezések összegének definíciója.
(X) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont; 2 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda A)(v + w) = \quad \boxed{\text{L}}$$

$$\lambda\big(A(v + w)\big) = \quad \boxed{\text{O}}$$

$$\lambda\big(A(v) + A(w)\big) = \quad \boxed{\text{X}}$$

$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(A(w)\big) = \quad \boxed{\text{L}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda A)(w)$$

17. Az A mátrixa a (b_1, b_2) bázisban $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mi lesz A mátrixa a $(3b_1, 3b_2)$ bázisban?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

18. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $X \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R}^2)$ az a lineáris leképezés, mely M-hez $M(1,2)^T$-t rendel. Mi lesz X mátrixa a szokásos bázispárban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

19. Adjunk meg egy bázist $\mathrm{Ker}(X)$-ben, ahol X az előző kérdésben szereplő lineáris leképezés.

Pl. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

20. Ha $f(x) = x^2 + x + i$ és v sajátvektora A-nak i sajátértékkel, akkor mennyi $f(A)(-iv)$?

$(2+i)v$

21. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció az $(1,2,3)^T$ és $(3,2,1)^T$ vektorokat kicseréli, az $(1,1,1)^T$ vektort pedig önmagába viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

Bármilyen valós szám.

22. Egy $M \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ mátrix determinánsa 1, minimálpolinomja $(x+1)^3(x-1)^2$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

$(x+1)^4(x-1)^2$

23. Hány olyan páronként nem hasonló komplex elemű 9×9-es mátrix van, amelynek a minimálpolinomja x^3?

7

24. Adjunk ellenpéldát: „a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha u és v lineárisan összefüggő."

Pl. $u = -v \neq 0$.

25. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ normális mátrixra $M(1,i)^T = (i,-1)^T$. Mi lesz $M^*(1,i)^T$?

$(-i,1)^T$

26. Mely $z \in \mathbb{C}$ értékekre lehet $x^2 - (z+1)x + z$ egy önadjungált mátrix minimálpolinomja?

$z \neq 1$, z valós.

27. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött ortonormált bázisban, ha szimmetrikus."

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

28. Legyen T a térben a $z = 0$ egyenletű S síkra való tükrözés. Adjuk meg T-nek egy olyan kétdimenziós invariáns alterét, ami nem az S.

Pl. az $y = 0$ sík.

29. Legyen $W = \{f \in V : f(1) = 0\}$, ahol V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb századfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló $\mathbb{R}$ fölötti vektortér. Mely $u \in \mathbb{R}$ számokra teljesül, hogy $V = W \oplus \langle x^2 + ux + 2u \rangle$?

$u \neq -1/3$

30. Legyen $Q(x,y,z) = bx^2 - 2xy - y^2 + yz + z^2$. Mely $b \in \mathbb{R}$ értékekre lesz Q pozitív szemidefinit?

Nincs ilyen b.