NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Módosítsuk $\mathbb{R}[x]$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy az $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-nek a $\lambda \in \mathbb{R}$-rel vett szorzata $2\lambda f(x)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

Pl. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$; $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $v = x$, vagy $1 \cdot v = v$; $v = x$.

12. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „azok az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixok, melyeknek sajátértéke a 3, alteret alkotnak.”

Pl. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ benne van, de a kétszerese nincs.

13. Az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ egy W **valódi** alterében egy $X \subseteq W$ rendszernek van kételemű független részhalmaza. Mennyi lehet $r(X)$?

2, 3.

14. Mely $c \in \mathbb{R}$-re teljesül, hogy $x^2 + 8x + c \in \langle x^2 - c, cx + 1\rangle$?

$c = \pm 2$

15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V, W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, T, D, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B összegtartó.
(L) A vagy B skalárszoros-tartó.
(T) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(D) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

Pontozás:		
	4 v. 5 helyes válasz:	2 pont;
	2 v. 3 helyes válasz:	1 pont;
	egyébként:	0 pont.

$$\big(\lambda(A+B)\big)(v) = \quad \boxed{\text{T}}$$

$$\lambda\big((A+B)(v)\big) = \quad \boxed{\text{D}}$$

$$\lambda\big(A(v) + B(v)\big) = \quad \boxed{\text{N}}$$

$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \boxed{\text{T}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \boxed{\text{D}}$$

$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

17. Az A mátrixa a (b_1, b_2) bázisban $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mi lesz A mátrixa a $(b_1, b_1 + b_2)$ bázisban?

$$\begin{pmatrix} a-c & a+b-c-d \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

18. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $X : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris leképezés, melynek mátrixa a szokásos bázispárban $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, továbbá $f\big((x,y)^T\big) = 5x + 6y$. Mennyi $X(f)$?

$(17, 39)^T$

19. Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^9)$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = 7$ és $\dim \mathrm{Ker}(B) = 8$, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A + B)$ lehetséges értékei?

6, 7, 8

20. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix egyetlen komplex sajátértéke 4, továbbá $f(x) = (x-4)^2$. Mi lehet $f(M)$?

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (nullmátrix)

21. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció az $(1,2,3)^T$ és $(3,2,1)^T$ vektorokat kicseréli, a $(0,1,1)^T$ vektort pedig önmagába viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

-1

22. Mely $d \in \mathbb{C}$ értékekre igaz, hogy ha egy mátrix minimálpolinomja $x^2 + ix + d$, akkor a mátrix nem diagonalizálható?

$d = -1/4$

23. Hány olyan páronként nem hasonló komplex elemű 8×8-as mátrix van, amelynek a minimálpolinomja x^4?

5

24. A $(4 - u + 2v)^2 = 6(4 + u^2 + 4v^2)$ egyenlőség mely u, v valós számokra teljesül?

$u = -1$ és $v = 1/2$

25. Melyek azok a 2×2-es valós normális mátrixok, melyeknek sajátvektora az $(1,0)^T$ és az $(1,1)^T$ is?

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

26. Mely unitér mátrixoknak sajátvektora az $(1,0)^T$?

$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$, $|z| = |w| = 1$.

27. Mely $c \in \mathbb{R}$ értékekre lehet $x^2 + cx + 3$ egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja?

$c^2 \geq 12$

28. Hány egydimenziós invariáns altere lehet a térben egy síkra tükrözésnek?

Végtelen sok.

29. Az $\mathbb{R}^6$-ban az U, V, W alterek közül bármely kettő egymásnak direkt kiegészítője. Mennyi lehet $\dim(U)$?

3

30. Ha Q kvadratikus alak és $Q(v) = 2$, akkor mennyi $Q(3v)$?

18