Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2016. május 12.) — eredmények és pontozás

1. A mátrix $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont), a sajátértékek 1 és 11 (2 pont), ezért az alak pozitív definit (1 pont). A normált sajátvektorokat kiszámítva a négyzetösszeg alak

$$1\Big(\frac{x-3y}{\sqrt{10}}\Big)^2 + 11\Big(\frac{3x+y}{\sqrt{10}}\Big)^2 \qquad \text{(2 pont).}$$

2. Legyen $b_1 = (1/\sqrt{2})(1,0,-1,0)$ (2 pont). Ha $v = (1,1,0,-2)$, akkor Gram-Schmidt eljárással $b_2 = (1/\sqrt{22})(1,2,1,-4)$ (4 pont).

3. A karakterisztikus polinom $x^4 - 3x^3 + 3x - x$ (1 pont), a sajátértékek 0 és 1 (háromszoros) (2 pont). A normált osztók, melyeknek minden sajátérték gyöke: $x(x-1)$, $x(x-1)^2$ és $x(x-1)^3$. Az elsőnek a mátrix nem gyöke, a másodiknak igen, ezért a minimálpolinom $x(x-1)^2$ (2 pont). A Jordan-alakban tehát a legnagyobb 1-hez tartozó blokk 2×2-es, vagyis az eredmény

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

4. A transzformáció mátrixa a szokásos bázisban

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

Ez nem önadjungált, mert M^*-ban a két i helyére $-i$ kerül (1 pont), MM^* diagonális mátrix lesz, a főátlóban 1, 1, 1, 4 szerepel, ezért nem unitér (1 pont), viszont M^*M is ugyanez a diagonális mátrix, tehát M normális, azaz ONB-ban diagonalizálható (1 pont). Mivel $A(v) = (1, 3i, 1, 4i)^T$ (1 pont), ezért $\langle A(v), v\rangle = \overline{1}\cdot 3 + \overline{(3i)}\cdot(-i) + \overline{1}\cdot 1 + \overline{(4i)}\cdot 2i = 9$ (1 pont).

5. A feltétel szerint $B^*(v) = (I - B)(v) = v - B(v)$, ezért $\langle v, B(v)\rangle = \langle B^*(v), v\rangle = \langle v - B(v), v\rangle$, ahonnan $\langle v, B(v)\rangle = (1/2)\langle v, v\rangle$. Így $\|B(v)\|\|v\|\cos\alpha = (1/2)\|v\|^2$, ahol α jelöli v és $B(v)$ szögét. De $\|B(v)\| = \|v\|$, hiszen B ortogonális, ezért $\cos\alpha = 1/2$, azaz $\alpha = 60°$. *Második megoldás:* Írjuk fel B mátrixát a tanult tétel szerinti blokkos alakban. A $B + B^T = I$ feltétel miatt a főátló végig $1/2$, emiatt csak 2×2-es forgatást tartalmazó blokkok szerepelhetnek, ahol $\cos\alpha = 1/2$, azaz $\alpha = 60°$. Itt még ellenőrizni kell, hogy $\langle v, [B]v\rangle = (1/2)\langle v, v\rangle$, de ez „blokkonként” teljesül.

6. Legyen M az A lineáris transzformáció mátrixa, válasszunk bázist az A magterében (ennek 3 eleme lesz), és egészítsük ki ezt a tér egy bázisává. Ebben a bázisban $[A]$ három oszlopa nulla, feltehető, hogy ez az első három oszlop. Mivel a főátlóbeli elemek összege nulla, a negyedik oszlopban is nulla a legalsó elem. Ezért a mátrixot négyzetre emelve a nullamátrixot kapjuk, vagyis a minimálpolinom x^2 vagy x. Utóbbi nem lehet, mert akkor $A = 0$ lenne, aminek a rangja 0. Ezért a minimálpolinom csak x^2 lehet. Erre jó példa minden olyan mátrix, amelynek minden eleme nulla, kivéve az utolsó oszlop legfelső elemét. *Második megoldás:* keressük az M mátrixot Jordan-alakban. Tudjuk, hogy a rang a blokkok rangjainak összege. Ezért egy kivétellel minden blokk rangja nulla (ez tehát egy 1×1-es, nullát tartalmazó blokk), a kivételes blokk pedig vagy 1×1-es, és abban nem nulla szám van, vagy 2×2-es nulla sajátértékkel. Előbbi lehetetlen, mert akkor a mátrix nyoma nem lenne nulla. Az utóbbi esetben a minimálpolinom x^2.