Progmat lineáris algebra gyakorlat

Második zárthelyi: 2016. 05. 09. — eredmények és pontozás

1. $\mathbf{f}_1 = [1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5}]^T$ az $[1, 0, 2]^T$ normáltja (1 pont). Ezután $\mathbf{f}_2$ a $[0, 1, 0]^T - \langle [0, 1, 0]^T, \mathbf{f}_1 \rangle \mathbf{f}_1$ normáltja, azaz $[0, 1, 0]^T$ (2 pont). Hasonlóan $\mathbf{f}_3 = [2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}]^T$ (3 pont).

2. A karakterisztikus polinom $(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ (1 pont), ezért a két sajátérték $\lambda = 5$ és $\lambda = -1$ (1+1 pont). Az 5-höz tartozó sajátaltér elemi az $[x + 8y, x + 3y]^T = 5[x, y]^T$ feltételnek eleget tevő $[x, y]^T$ vektorok, az egyenletrendszert megoldva ezek $[2y, y]^T$ alakúak, ahol $y \in \mathbb{R}$ (1 pont). A -1-hez tartozó sajátaltér elemi az $[x + 8y, x + 3y]^T = -[x, y]^T$ feltételnek eleget tevő $[x, y]^T$ vektorok, az egyenletrendszert megoldva ezek $[-4y, y]^T$ alakúak, ahol $y \in \mathbb{R}$ (1 pont). Mivel két különböző sajátérték van és a mátrix 2×2-es, ezért a mátrix diagonalizálható (1 pont). Például sajátvektorokból álló bázis lesz $[2, 1]^T$ és $[-4, 1]^T$.

3. A determinánst először az első sora szerint fejtsük ki, majd a kapott 4×4-es determinánst az utolsó előtti oszlopa szerint. Ekkor alsó háromszögmátrix marad, az eredmény a főátló elemeinek szorzata, vagyis 2.

4. A karakterisztikus polinom $-\lambda(\lambda^2 - 4)$, ezért a sajátértékek 0, 2 és -2 (2 pont). Ezek között van pozitív és negatív is, ezért a kvadratikus alak indefinit (1 pont). A megfelelő sajátvektorok normálva $[0, 0, 1]^T$, $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0]^T$ és $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0]^T$ (3 pont).

5. $\mathbf{ab} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$ (1 pont) és

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1)\mathbf{i} - (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)\mathbf{j} + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)\mathbf{k},$$

azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [1, 1, -1]^T$ (2 pont). A feladat második részében a vegyes szorzatra vonatkozó felcserélési tételt érdemes alkalmazni: $1 = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$. Tehát a $\mathbf{c}$ ismeretlen x, y, z koordinátáira $x + y - z = 1$ kell, hogy teljesüljön. Megfelel például a $\mathbf{c} = [1, 0, 0]^T$ vektor (3 pont).

6. Mivel a nullvektor képe nullvektor lineáris leképezésnél, c csak -1 lehet (2 pont). Ebben az esetben a magtérben lévő $[\alpha, \beta, \gamma]^T$ vektorokra az $\alpha = \beta + \gamma = 2\beta = 0$ feltétel teljesül, vagyis a magtér csak a nullvektort tartalmazza, és így dimenziója nulla (2 pont). A dimenzióösszefüggés miatt a képtér dimenziója $3 - 0 = 3$ (2 pont).