Bsc algebra2 normál gyakorlat

Második zárthelyi (2016. május 12.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

1. Határozzuk meg a $10x^2+6xy+2y^2$ valós kvadratikus alak szimmetrikus mátrixát, ONB-ben vett négyzetösszeg alakját és karakterét.

2. Álljon W azon (x, y, u, v) pontokból $\mathbb{R}^4$-ben, melyekre $x+y+u+v=0$ és $x-y+u=0$. Adjunk meg egy ortonormált bázist a W altérben.

3. Mi lesz a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix minimálpolinomja és Jordan-alakja? Segítség: a sajátértékek egész számok.

4. Tekintsük $\mathbb{C}^4$-en az

$$A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iu_2 \\ iu_1 \\ u_3 \\ 2u_4 \end{bmatrix},$$

transzformációt. Vizsgáljuk meg, hogy A diagonalizálható-e **ortonormált** bázisban $\mathbb{C}$ fölött, továbbá, hogy unitér-e, önadjungált-e, és számítsuk ki az $\langle A(v), v\rangle$ skaláris szorzatot abban az esetben, amikor $v = (3, -i, 1, 2i)^T$.

5. A B ortogonális transzformációra $B + B^T = I$ (az identitás). Igazoljuk, hogy ha $v \neq 0$, akkor v és $B(v)$ szöge $60°$.

6. Az $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mátrix rangja 1, a főátlóban álló elemek összege nulla. Mi lehet a minimálpolinomja? Minden lehetséges minimálpolinomra példamátrixot is kell adni.