Progmat lineáris algebra gyakorlat

Második mintazárthelyi — eredmények és pontozás

1. $\mathbf{f}_1 = [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$ a $[0,1,1]^T$ normáltja (1 pont). Ezután $\mathbf{f}_2$ az $[1,0,0]^T - \langle [1,0,0]^T, \mathbf{f}_1\rangle \mathbf{f}_1$ normáltja, azaz $[1,0,0]^T$ (2 pont). Hasonlóan $\mathbf{f}_3 = [0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]^T$ (3 pont).

2. A karakterisztikus polinom $(1-\lambda)(3-\lambda)+1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$ (1 pont), ezért az egyetlen sajátérték $\lambda = 2$ (1 pont). A hozzá tartozó sajátaltér elemi az $[x-y, x+3y]^T = 2[x,y]^T$ feltételnek eleget tevő $[x,y]^T$ vektorok, az egyenletrendszert megoldva ezek $[x,-x]$ alakúak, ahol $x \in \mathbb{R}$ (2 pont). Ez a sajátaltér egydimenziós, ezért nem található benne a térnek bázisa, és ezért a mátrix nem diagonalizálható (2 pont).

3. A determinánst először az utolsó sora szerint fejtsük ki, majd a kapott 4×4-es determinánst az utolsó előtti oszlopa szerint, végül a kapott 3×3-as determinánst az utolsó oszlopa szerint. Az eredmény 1.

4. A karakterisztikus polinom $-\lambda(\lambda^2 - 25)$, ezért a sajátértékek 0, 5 és -5 (2 pont). Ezek között van pozitív és negatív is, ezért a kvadratikus alak indefinit (1 pont). A megfelelő sajátvektorok normálva $[3/\sqrt{10}, 0, 1/\sqrt{10}]^T$, $[0,1,0]^T$ és $[1/\sqrt{10}, 0, -3/\sqrt{10}]^T$ (3 pont).

5. $\mathbf{ab} = 1\cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$ (1 pont) és

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2\cdot 1 - 3 \cdot 1)\mathbf{i} - (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\mathbf{j} + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2)\mathbf{k}\,,$$

azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [-1, 5, -3]^T$ (2 pont). A feladat második részére megfelel a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ választás, mert ekkor a vegyes szorzat három vektora lineárisan összefüggő, és így a vegyes szorzat értéke nulla (3 pont). Valójában pontosan azok a $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ vektorok jók, amelyek benne vannak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által generált altérben.

6. Mivel a nullvektor képe nullvektor lineáris leképezésnél, c csak nulla lehet (2 pont). Ebben az esetben a magtérben lévő $[\alpha, \beta, \gamma]^T$ vektorokra az $\alpha = \beta - \gamma = 2\beta - 2\gamma = 0$ feltétel teljesül. Itt tehát $[0,1,1]^T$ alkot bázist, és ezért ez 1-dimenziós (2 pont). A dimenzióösszefüggés miatt a képtér dimenziója $3 - 1 = 2$ (2 pont).