Progmat lineáris algebra gyakorlat

Első zárthelyi, 2016.04.04 — eredmények és pontozás

1. Gauss-eliminációval számolva

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 8 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A z a szabad változó, az első sorból $x = -1 - z$, a második sorból $y = z - 3$, ezért az általános megoldás egy alakja $(x, y, z) = (-1 - z, z - 3, z)$.

2. Gauss-eliminációval számolva

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{(2 pont).}$$

Van tilos sor, ezért $\mathbf{d} \notin U$ (1 pont). Mivel az első két oszlopban van vezéregyes (karika), ezért U-ban bázist alkot $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ (2 pont). Ez a bázis kételemű, ezért $\dim(U) = 2$ (1 pont).

3. Az M oszlopai függetlenek (az eliminációt elvégezve az egységmátrixot kapjuk), ezért rangja 3 (1 pont). A négyzetre emelést és az invertálást (Gauss-eliminációval) elvégezve az eredmény

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (2 pont);} \qquad (M^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (3 pont).}$$

Az invertálás lépései:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right]$$

4. Az (1) nem altér (1 pont), mert például $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eleme, de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nem (2 pont).

A (2) altér (indoklás nélkül is 1 pont), aminek elemei $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak. Mivel $[1, 0, 1]^T$ és $[0, 1, 1]^T$ függetlenek is, ezért bázist alkotnak (2 pont).

5. Legyen $U = \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ és $W = \mathrm{Span}(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + 2\mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a})$. Azt kell megmutatni, hogy U generátorai benne vannak W-ben, és fordítva, W generátorai benne vannak U-ban. Utóbbi nyilvánvaló, hiszen $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ és $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ is lineáris kombinációja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-nek (2 pont). Megfordítva, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{b} + 2\mathbf{c}) + 2(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 3\mathbf{a}$, ezért $(1/3)(3\mathbf{a}) = \mathbf{a} \in W$ (2 pont). Ezért $\mathbf{c} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) - \mathbf{a} \in W$ (1 pont), végül $\mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{a} \in W$ (1 pont).

6. $5\mathbf{a}_1 = 3(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2) \in U$, ezért $(1/5)(5\mathbf{a}_1) \in U$ (1 pont). Ekkor $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_1 \in U$ (1 pont). Álljon U azokból a vektorokból, melyeknek az utolsó két koordinátája nulla (1 pont), továbbá legyen $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1$. Ekkor $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{0} \in U$ és $2\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 = \mathbf{0} \in U$, de $\mathbf{b}_1$ nem lesz U-ban, ha az utolsó két komponens valamelyike nem nulla (3 pont). Azaz $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = [0, 0, 0, 1]^T$ megfelelő.