Progmat lineáris algebra gyakorlat

Második mintazárthelyi

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges** (a számolás részletei), a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak, a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Név és NEPTUN-kód **minden lapon OLVASHATÓ nyomtatott betűkkel** szerepeljen.

1. Az $\mathbb{R}^3$ tér $[0,1,1]^T$, $[1,0,0]^T$, $[0,1,0]^T$ bázisából készítsünk ortonormált bázist a Schmidt-eljárással.

2. Adjuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját, (jobb oldali) sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, és döntsük el, hogy diagonalizálható-e $\mathbb{R}$ fölött.

3. Számítsuk ki az alábbi determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó kvadratikus alak jellegét (milyen definit), és adjunk meg sajátvektorokból álló ortonormált bázist (a szokásos skaláris szorzatra nézve).

5. (2+1+3 pont) $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mennyi $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoriális és skaláris szorzata? Adjunk meg egy olyan $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ vektort, melyre $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b}$.

6. A $\varphi([\alpha, \beta, \gamma]^T) = [\alpha + c, \beta - \gamma, 2\beta - 2\gamma]^T$ transzformáció mely $c \in \mathbb{R}$ értékre lesz lineáris az $\mathbb{R}^3$ téren? Ebben az esetben adjuk meg a kép- és magterének a dimenzióját.