Progmat lineáris algebra gyakorlat
Első zárthelyi, 2016.04.04

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges** (a számolás részletei), a puszta eredményért nem jár pont. A feladatok 6 pontosak, a ZH jegye az összpontszám hatoda. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Név és NEPTUN-kód **minden lapon OLVASHATÓ nyomtatott betűkkel** szerepeljen.

1. Adjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer **általános** megoldását.

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ -2x \phantom{{}-5y} - 2z &= 2 \\ 3x - 5y + 8z &= 12 \end{aligned}$$

2. Tekintsük az alábbi vektorokat, és legyen $U = \mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Döntsük el, benne van-e $\mathbf{d}$ az U altérben (3 pont), és adjunk meg ebben az altérben egy bázist, valamint az altér dimenzióját ($2 + 1$ pont).

3. Emeljük négyzetre az M mátrixot és számoljuk ki M^2 inverzét, továbbá M rangját.

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

4. Alteret alkotnak-e az $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorok alábbi halmazai? Amelyik igen, abban adjunk meg egy bázist, amelyik nem, ott indokoljuk ezt meg.

(1) $x_1x_2 = x_3^2$;
(2) $x_1 + x_2 = x_3$.

5. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathrm{Span}(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + 2\mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a})$.

6. Az U kétdimenziós altere $\mathbb{R}^4$-nek és $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^4$. Tudjuk, hogy

(1) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \in U$ és $2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 \in U$.
(2) $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \in U$ és $2\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 \in U$.

Mutassuk meg, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in U$ (2 pont), és adjunk példát (U-t, $\mathbf{b}_1$-et és $\mathbf{b}_2$-t), amikor $\mathbf{b}_1 \notin U$.