Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2016. március 17.) — eredmények és pontozás

1. A W_1 nem altér, mert $x+1$ és x^2+1 benne van, de az összegük nincs (2 pont). A W_2 dimenziója 3 (1 pont). Ha $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, akkor a feltétel $d = f(0) = f'(0) = c$. Bázis például $x+1$, x^2, x^3 (1 pont). A függetlenség és a generátorrendszer-tulajdonság ellenőrzése 1+1 pont. Egy lehetséges gondolatmenet a következő. A megadott polinomok függetlenek, mert csupa különböző fokúak. A W_2 valódi altér, mert pl. x nincs benne, így dimenziója legfeljebb 3, és így minden 3 elemű független rendszer max. független, azaz bázis.

2. Az A nem lineáris, mert ha $M = E$, akkor $A(2M) = -2E$, ami nem egyenlő $2A(M) = 0$-val (2 pont). A B lineáris (0 pont), a szokásos bázisban a mátrixa

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

3. Az (x, y) képe $(-y, -x)$ (1 pont), ez tengelyes tükrözés az $y = -x$ egyenesre (1 pont). Bázistranszformációt végzünk: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont), ennek inverze $S^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), az eredmény $S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$ (2 pont).

4. Nyilván W része a legfeljebb másodfokú polinomokból álló altérnek, ami 3-dimenziós (1 pont). Így a valódi altér dimenziójáról szóló tétel miatt a két altér akkor és csak akkor egyenlő, ha W is háromdimenziós (1 pont). Ha W generátorai függetlenek, akkor ez teljesül, ha összefüggők, akkor W legfeljebb kétdimenziós lehet (1 pont). Ezért pontosan azok a c értékek megfelelőek, melyekre a megadott három generátor lineárisan független. Gauss-eliminációval számolva ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy $c \neq 0$ (ekkor lesz három vezéregyes, 3 pont). (Megjegyezzük, hogy ez számolás nélkül is látszik. Az első két polinomnak gyöke az 1, ezért ha a harmadiknak is gyöke, azaz $c = 0$, akkor valódi alteret kapunk. Ha viszont nem gyöke, akkor a harmadik polinom független az első kettőtől, amik kétdimenziós alteret generálnak. Így W ekkor háromdimenziós.)

5. A szokásos bázisban $[F] = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), $[F^2] = (1/2)\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ (1 pont), végül $[F^3] = -E$ (ez a 180 fokos forgatás, 1 pont). Így $F^4 = -F$, $F^5 = -F^2$, $F^6 = -F^3 = I$ (a helybenhagyás). A magasabb hatványok innentől kezdve ismétlődnek. Tehát csak az első három hatványt kell figyelembe venni (1 pont). Nyilván $[F]$ és $[F^2]$ független, hiszen egyik sem skalárszorosa a másiknak, viszont $[F] - [F^2] + [F^3] = 0$, tehát az első három hatvány már összefügg. Ezért a keresett dimenzió, azaz a rendszer rangja 2 (2 pont).

6. Vegyünk három olyan síkot, amely egy egyenesen halad át. Ha e_1, e_2, e_3 a szokásos bázis, és a közös egyenes $\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$, akkor például $U = \langle e_1, e_1 + e_2 + e_3 \rangle$, $V = \langle e_2, e_1 + e_2 + e_3 \rangle$, $W = \langle e_3, e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ megfelelő választás (3 pont). Az erősebb feltétel nem teljesíthető. Ha ugyanis $U \cap V = 0$, akkor a $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$ összefüggés miatt $\dim U + \dim V = 3$ (1 pont). Hasonlóan $\dim U + \dim W = 3 = \dim V + \dim W$, de ebből az egyenletrendszerből az adódik, hogy mindhárom altér dimenziója $3/2$, ami lehetetlen (2 pont).