Bsc algebra2 normál gyakorlat

Első zárthelyi (2016. március 17.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

1. Legyen V a legfeljebb harmadfokú, racionális együtthatós polinomok (és a 0) $\mathbb{Q}$ feletti vektortere, továbbá

a) $W_1 = \{f \in V \,:\, f$ főegyütthatója és konstans tagja egyenlő$\} \cup \{0\}$;

b) $W_2 = \{f \in V \,:\, f(0) = f'(0)\}$ (a vessző deriváltat jelöl).

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig altér, annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (de ne igazoljuk, hogy altér). A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

2. Legyen $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, továbbá $A, B : V \to V$, ahol

a) $A(M) = M - m_{11}^2 E$ (itt E az egységmátrix, m_{11} pedig az M mátrix bal felső sarkában álló elem);

b) $B(M) = M^T - 2M$.

Amelyik nem lineáris transzformáció A és B közül, annál igazoljuk ezt, amelyik pedig az, annak adjuk meg a mátrixát a szokásos bázisban (de ne igazoljuk, hogy lineáris).

3. Legyen V a sík $\mathbb{R}$ fölött. Egy $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mi ez a transzformáció? Mi C mátrixa az $\big((1,3),(1,2)\big)$ bázisban?

4. Legyen $V = \mathbb{R}[x]$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \langle x^2 - 1, 3x^2 - 2x - 1, x^2 - x + c\rangle$ a V altere. Mely $c \in \mathbb{R}$ értékekre lesz W egyenlő a legfeljebb másodfokú polinomokból álló altérrel?

5. Legyen F a síkon a 60 fokos, pozitív irányú forgatás. Határozzuk meg az F^k transzformációkból álló rendszer rangját, ahol $1 \le k \le 2016$.

6. Adjunk példát az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^3$ vektortérben olyan páronként különböző U, V és W altereskre, melyekre $U + V = U + W = V + W = \mathbb{R}^3$ és $U \cap V = U \cap W = V \cap W$ (3 pont, az altereket egy-egy generátorrendszerrel adjuk meg). Lehetséges-e ezeket úgy megadni, hogy még $U \cap V = 0$ is teljesüljön?