

1. Számítsa ki az alábbi ismerős mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Számítsa ki az  $A$ ,  $A^{-1}$ ,  $B$ ,  $B^{-1}$ ,  $A+B$ ,  $AB$  és  $A^{-1}B^{-1}$  mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Legyen

$$[\mathbf{a}]_{i,j,k} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}]_{i,j,k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}]_{i,j,k} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kiszámítandó:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

4. Határozza meg a következő permutációkban az inverziók számát!

$$a) \quad 5, 2, 4, 1, 6, 3; \quad b) \quad n, n-1, \dots, 2, 1; \quad c) \quad 2, 3, \dots, n, 1.$$

5. Számítsa ki az alábbi determinánsokat az elemi bázistranszformáció módszerével! A számítások mely része szükségtelen a determináns értékének meghatározásához?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 13 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$6. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = ? , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = ?$$

7. Számítsa ki a következő mátrixok determinánsát! (A túloldali  $F, G, H, I, J$  mátrix  $n \times n$ -es.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & a_3 & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 + b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 - b_1 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 - b_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 - b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

8. Legyen  $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Vizsgáljuk meg  $V$ -ben az összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait [a  $\mathbb{C}$ -vel összehasonlítva], pl. melyek az invertálható mátrixok  $V$ -ben?

9. Legyen  $W = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ . Vizsgáljuk meg  $W$ -ben az összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait, pl. melyek az invertálható mátrixok  $W$ -ben?

10.  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$  esetén legyen

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

A geometriai vektorok skaláris szorzatának mintájára vizsgáljuk meg  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  műveleti tulajdonságait, kapcsolatát az  $\mathbb{R}^n$ -beli összeadással és skalárral való szorzással.