Lineáris algebra (A, B, C) 4. gyakorlat 2016. február 29 – március 4.

1. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját (elemi bázistranszformációval):

a) $\begin{bmatrix}2\\3\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\0\\1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\2\\3\end{bmatrix}.$ b) $\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\\2\end{bmatrix}.$

2. Elemi bázistranszformációval oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned} -x+3y+3z &= 2 \\ 3x+y+z &= 4 \\ 2x-2y+3z &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 &= 11 \\ x_1-x_2-2x_3 &= -7 \\ 3x_1+2x_2-x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+3y+z &= 11 \\ x-y-2z &= -7 \\ 3x+2y-z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+3x_2 &= 1 \\ 2x_1+5x_2+3x_3 &= 4 \\ x_2-2x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x+5y &= 3 \\ x+2y &= 3 \\ 5x+9y &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1+3x_2+5x_4 &= 3 \\ x_2+x_3+2x_4 &= 3 \\ 2x_1+5x_2+2x_3+9x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Néhány szám megváltoztatásával (pl. a negyedik egyenletrendszer harmadik egyenletében a -2 és a -3 felcserélésével) gyártsunk újabb megoldandó egyenletrendszereket!

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket! Milyen következtetés adódik ebből a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására nézve?

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 1{,}001y &= 2{,}001 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 2{,}001 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 1{,}001y &= 2{,}002 \end{aligned}$$

4*. Hogyan függ az alábbi egyenletrendszer megoldásainak száma az $r \in \mathbb{R}$ értékétől?

$$\begin{aligned} rx_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + rx_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + rx_3 &= 1 \end{aligned}$$

5. $\mathbb{R}^n$ egy k-dimenziós alterében melyek igazak a következő állítások közül?
a) Minden k-nál kevesebb vektorból álló vektorrendszer lineárisan független.
b) Minden k-nál több vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő.
c) Az altér minden generátorrendszere legalább k vektorból áll.
d) Az altér minden legalább k vektorból álló vektorrendszere az altér generátorrendszere.
e) Az altér minden k elemű generátorrendszere az altér bázisa.
f) Az altér minden k elemű lineárisan független vektorrendszere az altér bázisa.

6. Adjunk meg $\mathbb{R}^4$-ben és $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben olyan altereket, melyek dimenziója $0, 1, 2, 3$, ill. 4.

7. Tekintsük $n \geq 6$ esetén az $\mathbb{R}^n$ azon $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ elemeit, melyekre
a) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ b) $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$ c) van olyan i, hogy $x_i = 0$
d) van olyan i, hogy $x_i \neq 0$ e) $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots$ és $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots$
f) $x_1 = x_4 = x_7 = \ldots$, $x_2 = x_5 = x_8 = \ldots$, $x_3 = x_6 = x_9 = \ldots$
g*) adott $y \in \mathbb{R}$ mellett $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y$.
A fenti hét részhalmaz közül közül válasszuk ki az altereket, s ezekben keressünk bázist!

8*. Határozzuk meg az előző feladatban előforduló alterekből alkotható altérpárok által generált altereket!